Einführung in das Langlandsprogramm

im Winter 2013

Wir werden uns in zwei Etappen dem Thema nähern. Vor dem Seminarwochenende wollen wir uns gemeinsam Grundlagen erarbeiten, die für das Verständnis der Vorträge am Workshopwochenende hilfreich sein werden.

Wir haben am Workshopwochenende selbst leider keine Zeit, auf die klassische Theorie der Hecke-Charaktere und Modulformen einzugehen. Die Vortragenden sind aber dazu eingeladen, dieses fundamentalen Beispiele in ihre Vorträgen aufzugreifen. Daher ist es hilfreich, sich mit den Grundlagen dieser Theorie vertraut zu machen, insbesondere sei auf [11, Chapter 1], [8, Chapter 1], [3, Chapter 3], [27, Chapters 1-3] verwiesen.

Wir werden uns auf automorphe Darstellungen der $\mathrm{GL}(n)$ über Zahlkörpern (d.h. Charakteristik null) konzentrieren. Die Situation im geometrischen Langlandsprogramm (Charakteristik $p > 0$) ist oft einfacher, da die komplizierte Darstellungstheorie an den archimedischen Stellen wegfällt. Daher ist das Seminar eine gute Grundlage, auch diesen Zweig zu verstehen. Überhaupt wollen wir den Teilnehmern ermöglichen, die fundamentalen Objekte des Langlandsprogramms kennenzulernen, um danach in der Lage zu sein, selbst weiterführende Literatur zu lesen. Die hier angegebene Literaturliste ist keineswegs vollständig, aber sie kann als Startpunkt dienen, denn in den Referenzen finden sich weiterführende Referenzen, welche ein tieferes Studium erlauben.

Zunächst wollen und müssen wir die zugrundeliegenden Objekte definieren und die entsprechende Darstellungstheorie verstehen. Dies geschieht in den Vorträgen (V1)-(V8). Für $\mathrm{GL}(n)$ ist das Bild hier vollständig und basiert nicht auf Vermutungen. In den Vorträgen (V9) bis (V11) können wir dann die Früchte ernten, und werden nacheinander die Jacquet-Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}(2)$, eine der ersten bewiesenen Instanzen der Langlandsfunktorialität, die lokale und globale Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}(n)$ (bekannt nur im lokalen), sowie die Langlands-Funktorialität (bekannt nur in wenigen Fällen) kennenlernen. Auf Base-Change (Arthur-Clozel), potential Modularity, Existenz von Galoisdarstellungen, die Arthur-Selberg'sche Spurformel etc. können wir aus Zeitgründen nicht eingehen.

Vorträge

Im Vorfeld sind folgende Einführungsvorträge möglich:

(E1) Darstellungstheorie (pro)endlicher Gruppen und (Artinsche) L-Funktionen zu Galoisdarstellungen, Artin-Formalismus.

(E2) Klassenkörpertheorie und Konsequenzen für L-Funktionen.

(E3) Die Klassifikation der komplexen halbeinfachen Lie-Algebren.

(E4) Die irreduziblen endlichdimensionalen Darstellungen komplexer reduktiver Lie-Algebren.

(E5) Reduktive Algebraische Gruppen, ihre Klassifikation und ihre rationalen Darstellungen.

(E6) Adele, Idele, Gitter und die Adelisierung algebraischer Gruppen.

(E7) Modulformen für $\mathrm{GL}(2)/\mathbb{Q}$ und ihre L-Funktionen.

Es folgen die Vorträge für das Workshopwochenende. Vortrag V1 ist für Freitag Abend vorgesehen, Vorträge V2-V6 für Samstag, und V7-V11 für Sonntag.

(V1) **Darstellungstheorie kompakter Lie-Gruppen, reelle reduktive Lie Gruppen.** Lie-Algebra, maximale Tori, Wurzeln, endlichdimensionale (bzw. unitäre) Darstellungen kompakter Gruppen, etwas zur Struktur reeller reduktiver Lie Gruppen: Existenz und Eindeutigkeit maximaler kompakter Untergruppen, Komplexifizierung linearer reduktiver Gruppen, Iwasawa-Zerlegung, symmetrische Räume; Ref: Knapps Buch [20], sowie Helgasons Standardwerk [17].

(V2) **Reduktive Gruppen, Adelisierung.** Reduktive algebraische Gruppen, parabolische Untergruppen, Levi-Zerlegung, Adelisierung, arithmetische Untergruppen, starke Approximation und Konsequenzen; Ref: Springers Lecture in Corvallis [9, Reduktive groups], Murnaghans Kapitel in [2], Borels Buch [4], Borel-Tits' Artikel [5, 6], und Tits' Lecture in Corvallis [9, Reductive groups over local fields] (optional), sowie [8, Chapter 3, Section 3.3], [11, Chapter 3] und Kudlas Lectures in [3, 6. Tate's Thesis und Section 1 in 7. From Modular Forms to Automorphic Representations] für $\mathrm{GL}(2)$.

(V3) **Automorphe Formen auf $\mathrm{GL}(n)$.** K-endliche, glatte und L^2-Formen für $\mathrm{GL}(n)$, im wesentlichen wie Cogdells Lecture 2 im Fieldsband [10], sowie Borel-Jacquet in Corvallis [9, Automorphic forms and automorphic representations] (aber nur Formen, noch nicht Darstellungen); weitere Referenzen sind [8, Chapter 3, Section 3.3], [11, Chapter 3], und Kudlas 2. Lecture in [3, Sections 1 und 2 in 7. From Modular Forms to Automorphic Representations] (letztere alle nur $\mathrm{GL}(2)$).

(V4) **Automorphe Darstellungen von $\mathrm{GL}(n)$.** Automorphe Darstellungen, Hecke-Algebra, wie in Cogdells Lecture 3 in [10], sowie Borel-Jacquet und Flath in Corvallis [9, Automorphic forms and automorphic representations, Decomposition of representations into tensor products], auch [8, Chapter 3, Section 3.3]; weitere Referenzen sind [11, Chapter 3 und Chapter 5], und Kudlas 2. Lecture in [3, Section 2 in 7. From Modular Forms to Automorphic Representations] (letztere alle nur $\mathrm{GL}(2)$).

(V5) **Langlandsklassifikation: Archimedisch.** Langlands' Klassifikation der irreduziblen zulässigen Darstellungen von $\mathrm{GL}(n,k)$, $k \cong \mathbb{R}$ und $k \cong \mathbb{C}$. Ref: Langlands' Original [22], Wallachs und Knapps Lectures in Corvallis [9, Representations of reductive Lie groups, Representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$], Murtys Chapter 4 im Fieldsband [10], für $\mathrm{GL}(2)$ auch [11, Chapter 2 und 4], [8, Chapter 2], und Kudlas 2. Lecture in [3, Section 3 in 7. From Modular Forms to Automorphic Representations]. Wer das wirklich verstehen mag, dem seien [1, 7, 13, 14, 15] anempfohlen.

(V6) **Langlandsklassifikation: Nicht-Archimedisch.** Klassifikation der irreduziblen zulässigen Darstellungen $\mathrm{GL}(n,k)$ für k nicht-archimedisch. Ref: Carties Corvallis Lecture [9, Representations of $\mathfrak{p}$-adic groups], Murtys Chapter 4 in [10], für $\mathrm{GL}(2)$ auch [11, Chapter 4], [8, Chapter 4], Kudlas 2. Lecture in [3, Section 3 in 7. From Modular Forms to Automorphic Representations].

(V7) **Langlandsklassifikation: Global.** Langlands' (erster) Corvallis Artikel [9, On the notion of an automorphic representation], für Langlands' notwendige allgemeine Theorie der Eisensteinreihen, siehe [23]. Siehe auch Murtys Chapters 4 und 5 in [10].

(V8) **Fouriertransformation und Multiplicity One.** Via non-abelscher Fouriertransformation, welche zu Whittakermodellen führt, ergibt sich, daß der Raum der Spitzenformen für $\mathrm{GL}(n)$ multiplizitätenfrei ist [26, 25]. Weitere Referenzen: Cogdells Lecture 4 in [10], Piatetski-Shapiros Lecture in Corvallis [9, Multiplicity one theorems], Cogdells 1. Lecture in [3, Section 1 in 9. Analytic Theory of L-Functions for GL_n], und für $\mathrm{GL}(2)$ das Original in [19], und wie immer [11] und [8, Chapter 3, Section 3.5].

(V9) **Die Jacquet-Langlands-Korrespondenz.** Jacquet-Langlands' Original [19, Chapter III], [8], [11], Gelbarts Lectures [12], sowie für $\mathrm{GL}(n)$ bspw. in [16, Chapter VI, Section VI.1]. Grundlagen zu Quaternionenalgebren finden sich in [28].

(V10) **Die lokale und globale Langlands-Korrespondenz.** Die lokale nicht-archimedische Langlands-Korrespdondenz wird in Harris-Taylor [16] (Einführung sehr gut lesbar!) und Henniarts Original-Arbeiten [18] etc. behandelt, Murtys Chapter 10 in [10] skizziert die lokale Korrespondenz und Cogdell diskutiert in seiner 2. Lecture in [3, 10. Langlands Conjectures for GL_n] das lokale als auch das globale (inkl. geometrische) Setup, weiterhin ist Borels Corvallis Lecture [9, Automorphic L-functions, Section 12] eine gute Referenz (damals war die lokale Langlands-Korrespondenz noch offen). Weiterhin ist [8, Chapter 4, Section 4.9] lesenswert. Historisch gesehen natürlich auch [19, Chapter I] für $\mathrm{GL}(2)$.

(V11) **Langlands' Funktorialitätsvermutungen.** Langlands' [24], Cogdells 3. Lecture in [3, 11. Dual Groups and Langlands Functoriality], Cogdells Lectures 11, 12 und 13 in [10]. Eine informelle Diskussion findet sich ebenfalls in [8, Chapter 3, Section 3.9].

Literatur

[1] J. Adams und D. Barbasch und D.A. Vogan. The Langlands Classification. *Progress in Mathematics* **104**, Birkhäuser, 1992.

[2] J. Arthur und D. Ellwood und R. Kottwitz (editors). Harmonic Analysis, the Trace Formula, and Shimura Varieties. *Clay Mathematics Proceedings* **4**, AMS, 2005.

[3] J. Bernstein and S. Gelbart. An Introduction to the Langlands Program. Birkhäuser, 2003.

[4] A. Borel. Linear algebraic groups, 2nd enlarged edition. *Graduate Texts in Mathematics* **126**, Springer, 1992.

[5] A. Borel und J. Tits. Groupes réductifs. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* **27**, pages 55–151, 1965.

[6] A. Borel und J. Tits. Compléments à l'article: Groupes réductifs. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.* **41**, pages 253–276, 1972.

[7] A. Borel und N. Wallach. Continuous cohomology, discrete subgoups and representations of reductive groups, 2nd edition. *Mathematicals Surveys and Monographs* **67**, AMS, 2000.

[8] D. Bump. Automorphic forms and representations. *Cambridge Studies in Adv. Math.* **55**, Cambridge University Press, 1997.

[9] W. Casselman und A. Borel. Automorphic forms, representations and L-functions. *Proc. of Symp. in Pure Math.* **33** *I+II, Corvallis 1977*, AMS, 1979.

[10] J.W. Cogdell und H.H. Kim und M.R. Murty. Lectures on Automorphic L-functions. *Fields Institute Monorgraphs*, AMS, 2004.

[11] S.S. Gelbart. Automorphic Forms on Adele Groups. *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, 1975.

[12] S.S. Gelbart. Lectures on the Arthur-Selberg trace formula. *University Lecture Series* **9**, AMS, 1996.

[13] Harish-Chandra. Representations of semi-simple Lie groups I. *Transactions of the American Mathematical Society* **75**, pages 185–243, 1953.

[14] Harish-Chandra. Representations of semi-simple Lie groups II. *Transactions of the American Mathematical Society* **76**, pages 26–65, 1954.

[15] Harish-Chandra. Representations of semi-simple Lie groups III. *Transactions of the American Mathematical Society* **76**, pages 245–253, 1954.

[16] M. Harris und R. Taylor. The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties. *Princeton Univ. Press*, 2001.

[17] S. Helgason. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, 3rd edition. *Graduate Studies in Mathematics* **34**, AMS, 2012.

[18] G. Henniart Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique. *Inventiones Mathematicae* **139**, pages 439–455, 2000.

[19] H. Jacquet und R.P. Langlands. Automorphic forms on $\mathrm{GL}(2)$. *LNM* **114**, Springer, 1970.

[20] A. Knapp. Lie Groups: Beyond an Introduction, 2nd edition. *Progress in Mathematics* **140**, Birkhäuser, 2002.

[21] R.P. Langlands. Letter to A. Weil. 1967.

[22] R.P. Langlands. On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. AMS, 1973.

[23] R.P. Langlands. On the functional equation satisfied by Eisenstein Series. *LNM* **544**, Springer, 1976.

[24] R.P. Langlands. Endoscopy and beyond. *Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory (Shalikafest 2002)*, ed. H. Hida, D. Ramakrishnan, F. Shahidi, Johns Hopkins University Press, pages 611–697, 2002.

[25] I.I. Shalika. Euler subgroups. In *Lie groups and their representations*, ed. I.M. Gelfand, Wiley and Sons, pages 597–620, 1974.

[26] A. Shalika. The multiplicity one theorem for $\mathrm{GL}(n)$. *Annals of Mathematics* **100**, pages 171–193, 1974.

[27] G. Shimura. Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. *Publications of the Mathematical Society of Japan* **11**, Iwanami Shoten und Princeton University Press, 1971.

[28] M.-F. Vignéras. Arithmétique des Algèbres de Quaternions. *LNM* **800**, Springer, 1980.

Weblinks

Einige Literatur online verfügbar: Casselmans Onlinesammlung von Langlands' Werken:
`sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/Langlands/`
sowie Langlands Seite am IAS:
`publications.ias.edu/rpl/`
Die Corvallis-Proceedings [9] waren früher vollständig online auf der AMS-Website. Kann es gerne lokal verfügbar machen. Gelbarts Lectures [12] sind online:
`arxiv.org/abs/math/9505206`
Ebenso ist [2] offiziell online:
`www.claymath.org/library/proceedings/cmip04.pdf`