| Teamnummer | Name und Vorname |
| --- | --- |
| | |

---

# Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Auf einem Billardtisch (bei dem die Koordinatenachsen $x = 0$ und $y = 0$ als Banden dienen) liegen zwei Kugeln $P(2 \mid 4)$ und $Q(3 \mid 2)$. Die Kugel $P$ soll so angestoßen werden, dass sie nach Reflexion zuerst an der $y$-Achse und dann an der $x$-Achse die Kugel $Q$ trifft.

An welcher Stelle muss sie die $y$-Achse treffen?

*Lösung.*

Es bezeichne $(0 \mid b)$ den Punkt der $y$-Achse, der von der Kugel getroffen wird.

Dann läuft die Kugel zunächst auf der Geraden $y = ax + b$, wobei $2a + b = 4$ gilt ($P$ liegt ja auf der Geraden).

Nach Reflexion an der $y$-Achse läuft die Kugel auf der Geraden $y = -ax + b$ weiter, denn der Reflexionspunkt $(0 \mid b)$ liegt auf der Geraden, und die Steigung wird durch „Einfallswinkel = Ausfallswinkel" festgelegt. Diese Gerade trifft im Punkt $(\frac{b}{a} \mid 0)$ auf die $x$-Achse.

Nach Spiegelung dort wird daraus die Gerade $y = a(x - \frac{b}{a}) = ax - b$, denn der neue Punkt liegt darauf und die Steigung ändert wieder das Vorzeichen.

Da auf dieser Geraden der Punkt $Q$ liegen soll, muss

$$2 = 3a - b$$

gelten. Zusammen mit der alten Gleichung $2a + b = 4$ liefert das $5a = 6$ und

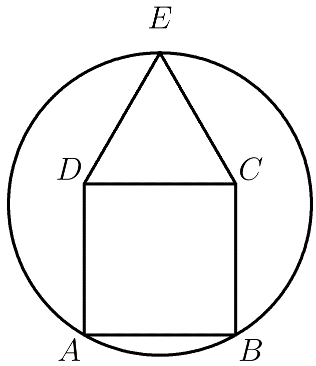
$$b = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}.$$

Der Reflexionspunkt an der $y$-Achse ist also der Punkt $(0 \mid \frac{8}{5})$.

| Teamnummer | Name und Vorname |
| --- | --- |
| | |

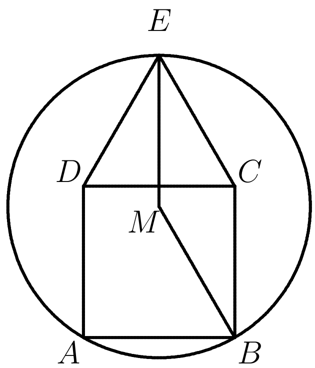
# Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Gegeben ist das Einheitsquadrat $ABCD$ und das gleichseitige Dreieck $DCE$ Berechnen Sie den Radius des Kreises durch $A, B$ und $E$.




*Lösung.*

Statt den Radius zu berechnen, zeichnen wir den Mittelpunkt und die Radien nach $B$ und $E$ ein:




Da die Längen der Strecken $MB$ und $ME$ beide gleich dem Radius sind und die Strecken $BC$ und $CE$ beide gleich 1 sind, ist das Viereck $MBCE$ ein Drachen.

Weiter ist $ME$ parallel zu $BC$, also ist das Viereck auch ein Parallelogramm.

Daher ist es eine Raute, und alle Seiten sind gleich lang.

Der Radius ist mithin 1.

| Teamnummer | Name und Vorname |
| --- | --- |
| | |

## Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Zeichnen Sie in die $x$-$y$-Ebene alle Punkte $(x \mid y)$, für die die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$|x| + |x - y| = 4.$$

*Lösung.*

Für $x \geq 0,\ x \geq y$ ist die Bedingung an die Punkte $2x - y = 4$ oder auch

$$y = 2x - 4.$$

Für $x \geq 0,\ x \leq y$ ist die Bedingung an die Punkte $x + (y - x) = 4$ oder auch

$$y = 4.$$

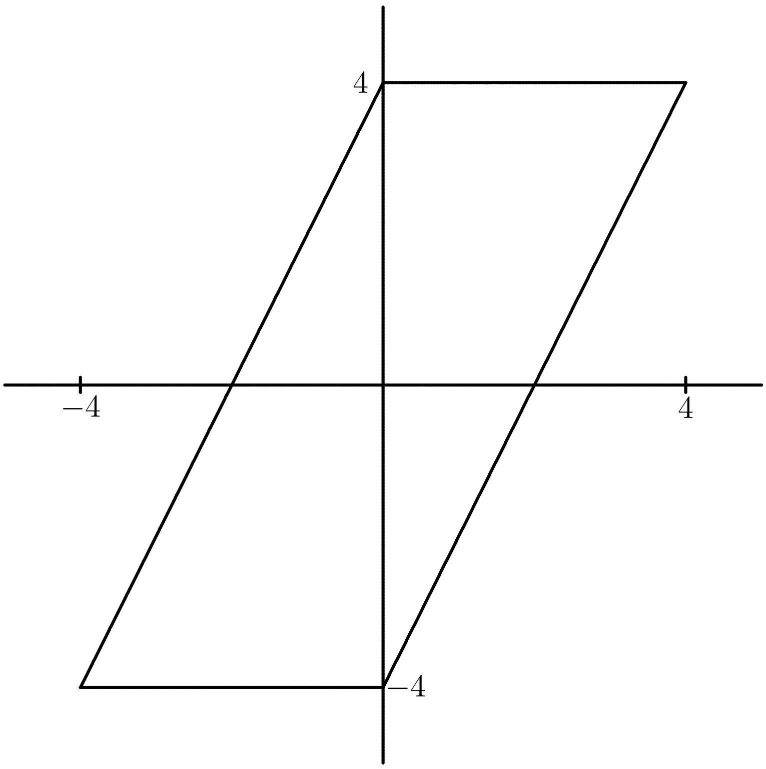
Das liefert die Punkte mit $x \geq 0$.

Außerdem ist die beschriebene Menge punktsymmetrisch zum Ursprung.

Es ergibt sich daher als Menge insgesamt das Parallelogramm mit den Ecken

$$(0 \mid -4), (4 \mid 4), (0 \mid 4) \text{ und } (-4 \mid -4).$$

Im Bild:



| Teamnummer | Name und Vorname |
| --- | --- |
| | |

---

# Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit Umfang 1m.

Wie lang ist die Hypotenuse mindestens?

*Lösung.*

Wir bezeichnen mit $a, b$ die Katheten und mit $c$ die Hypotenuse des Dreiecks. Dann gelten die Gleichungen

$$a + b + c = 1, \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Löst man hier die zweite Gleichung nach $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ auf, so ergibt sich aus der ersten die Forderung

$$\sqrt{c^2 - a^2} = 1 - a - c.$$

Quadrieren dieser Gleichung und Auflösung nach $c$, das dann nur noch linear auftritt, liefern

$$c = \frac{1 - 2a + 2a^2}{2(1-a)}.$$

Dies gilt es in Abhängigkeit von $a$ zu minimieren. Dabei ist $0 \le a \le c$ und damit auch $0 \le a \le \frac{1}{2}$, denn $a + c \le 1$. Wir leiten also $c$ nach $a$ ab:

$$c' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-a) \cdot (4a - 2) - (-1) \cdot (2a^2 - 2a + 1)}{(1-a)^2}.$$

Durch Ausmultiplizieren ergibt sich der Zähler hier als

$$4a - 2 - 4a^2 + 2a + 2a^2 - 2a + 1 = -2a^2 + 4a - 1.$$

Dies wird 0, wenn $a = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Hier kann geometrisch nur die Lösung auftreten, die nicht größer ist als 1:

$$a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

Es gibt also nur einen Wert für die Kathete $a$, bei der $c'$ gleich 0 ist. Aus Symmetriegründen gilt hier $a = b$ und damit

$$c = 1 - 2a = \sqrt{2} - 1.$$

Als Probe für das Symmetrieargument sei gesagt, dass dann tatsächlich

$$a^2 + b^2 = 2a^2 = 2(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2}) = 3 - 2\sqrt{2} = c^2.$$

Da die Ableitung von $c$ keine weitere Nullstelle hat und der Wert von $c$ sowohl für $a = 0$ als auch für $a = \frac{1}{2}$ gleich $\frac{1}{2}$ ist, liegt tatsächlich mit $c = \sqrt{2} - 1$ die minimale Hypotenusenlänge vor.

## Alternative Lösung

Gesucht ist die kürzeste Strecke $AB$, über der es ein rechtwinkliges Dreieck mit Umfang 1 gibt. Sei $c$ die Länge dieser Strecke und $a$ und $b$ die Länge der Katheten.

**Vorüberlegung**: $c < \frac{1}{2}$, denn sonst würde gelten:

$$\frac{1}{4} \leq c^2 = a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 = (1-c)^2 \leq (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

Nun haben wir für die Strecke $AB$:

(1) Die Punkte $C$, so dass $ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $AB$ ist, bilden den Thaleskreis über $AB$.

(2) Die Punkte $C$, so dass das Dreieck $ABC$ den Umfang 1 hat, bilden eine Ellipse $E$ mit den Brennpunkten $A$ und $B$. Genauer besteht die Ellipse $E$ aus allen Punkten $C$ mit $d(A,C) + d(C,B) = 1 - c$. Da $c < \frac{1}{2}$, schneidet $E$ die Gerade durch $A$ und $B$ in zwei Punkten $X_1$ und $X_2$, die von $A$ und $B$ jeweils den Abstand $\frac{1}{2} - c$ haben und jeweils auf der Halbgeraden liegen, die die Strecke $AB$ nicht enthält. $E$ ist symmetrisch zum Mittelpunkt $M$ der Strecke $AB$. Weiterhin schneidet $E$ die Mittelsenkrechte von $A$ und $B$ in zwei Punkten $Y_1$ und $Y_2$, die von $A$ und von $B$ jeweils Abstand $\frac{1}{2}$ haben und es gilt:

$$h := d(M, Y_1) = d(M, Y_2) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{1-c^2}.$$

Die Strecke $AB$ ist nun also Hypotenuse eines Dreiecks mit Umfang 1, genau dann wenn der Thaleskreis aus (1) sich mit der Ellipse $E$ aus (2) schneidet. Dies ist genau dann der Fall, wenn $h \leq \frac{c}{2}$, da $\frac{c}{2}$ der Radius des Thaleskreis ist. Es gilt:

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{1-c^2} \leq \frac{c}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2}} \leq c.$$

Also ist die kürzest mögliche Länge der Hypotenuse $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

**Anmerkung**: Die etwas vom Himmel fallend zu scheinende Vorüberlegung ergibt sich auch durch eine Fallunterscheidung, wie die Ellipse $E$ die Gerade durch $A$ und $B$ schneidet. Es stellt sich heraus, dass der Fall, dass die Schnittpunkte im Inneren der Strecke $AB$ liegen, zu einem Widerspruch führt.