Tag der Mathematik 2010

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Für jede reelle Zahl x sei $[x]$ die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x. Zum Beispiel gelten $[\frac{3}{8}] = 0$, $[2] = 2$ und $[-1,4] = -2$.

Zeichnen Sie im Koordinatensystem alle Punkte $(x|y)$ mit der Eigenschaft

$$[x]^2 + [y]^2 = 4.$$

Lösung.

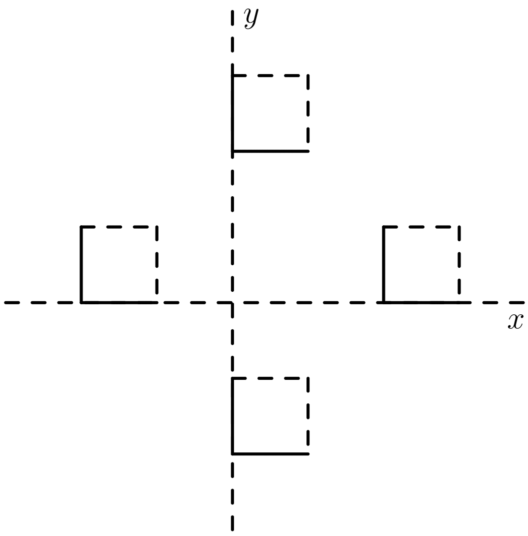
Da $[x]$ und $[y]$ ganze Zahlen sind, sind die folgenden Bedingungen zu $[x]^2 + [y]^2 = 4$ äquivalent:

$$[x] = 0,\ [y] = \pm 2 \ \text{ oder } \ [x] = \pm 2,\ [y] = 0.$$

Das wiederum führt zu den 4 Bereichen

$$0 \le x < 1,\ 2 \le y < 3 \ \text{ oder } \ 0 \le x < 1,\ -2 \le y < -1$$
$$\text{oder}$$
$$2 \le x < 3,\ 0 \le y < 1 \ \text{ oder } \ -2 \le x < -1,\ 0 \le y < 1.$$

Wir erhalten folgende Skizze:



Die gesuchten Punkte sind die angedeuteten Quadratflächen samt der unteren und linken Kanten.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Das ganzzahlige Polynom $X^3 + sX^2 + mX + p$ habe die Nullstellen a, b, c, sodass also

$$X^3 + sX^2 + mX + p = (X - a)(X - b)(X - c)$$

gilt. Ganzzahlig heißt dabei, dass s, m, p ganze Zahlen sind. Für die Nullstellen a, b, c setzen wir das nicht voraus!

Zeigen Sie, dass auch

$$(X - a^2)(X - b^2)(X - c^2)$$

ganzzahlige Koeffizienten hat.

Lösung. Durch Ausmultiplizieren sieht man, dass

$$s = -a - b - c,\ m = ab + ac + bc,\ p = -abc.$$

Analog ergeben sich die Koeffizienten von

$$(X - a^2)(X - b^2)(X - c^2) = X^3 + SX^2 + MX + P$$

als

$$S = -a^2 - b^2 - c^2,\ M = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2,\ P = -a^2b^2c^2.$$

Wir müssen also zeigen, dass die Zahlen

$$a^2 + b^2 + c^2,\ a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2,\ a^2b^2c^2$$

ganzzahlig sind, wenn dies für $a + b + c,\ ab + bc + ac,\ abc$ gilt.

Zuerst benutzen wir die naheliegende Formel

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac),$$

um zu sehen, dass

$$S = -s^2 + 2m$$

ganzzahlig ist.

Das gilt auch für $P = -p^2$. Und schließlich ist

$$m^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2(a^2bc + b^2ac + c^2ab) = M + 2sp,$$

also auch

$$M = m^2 - 2sp$$

eine ganze Zahl.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

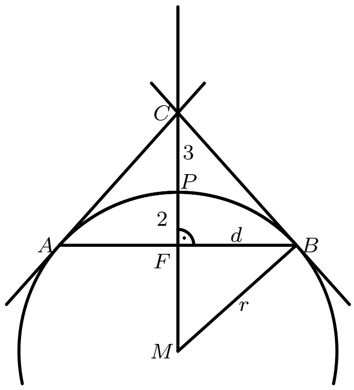
Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Auf einem Kreis liegen die Punkte A und B, deren zugehörige Tangenten sich in einem Punkt C schneiden. Die zu AB senkrechte Gerade durch C schneidet den Kreis in einem Punkt P, der von C 3 cm und von AB 2 cm entfernt liegt.

Wie groß ist der Abstand zwischen A und B?

Lösung.

Wir komplettieren die Skizze aus der Aufgabenstellung durch Hinzufügen des Mittelpunkts M im Kreis und durch Benennung des Lotfußpunktes von C auf AB als F. Weiter sei r der Radius des Kreises und d der Abstand von F zu B. Der gesuchte Abstand ist $2d$.



Nach Pythagoras für das Dreieck BFM gilt

$$r^2 = (r - 2\text{cm})^2 + d^2, \quad \text{also} \quad d^2 = 4\text{cm} \cdot r - 4\text{cm}^2.$$

Der Höhensatz für das Dreieck CMB (das auch rechtwinklig ist) sagt

$$d^2 = 5\text{cm} \cdot (r - 2\text{cm}),$$

und durch Gleichsetzen dieser Ausdrücke für d^2 ergibt sich

$$4r - 4\text{cm} = 5r - 10\text{cm}, \quad \text{also} \quad r = 6\text{cm}.$$

Das wiederum liefert dann $d^2 = 20\text{cm}^2$, also

$$d = 2\sqrt{5}\text{cm},$$

und der gesuchte Abstand ist

$$4\sqrt{5}\text{cm}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Es seien A, B, C, D vier Punkte in der Ebene, sodass der Abstand von A zu B gleich dem Abstand von C zu D ist.

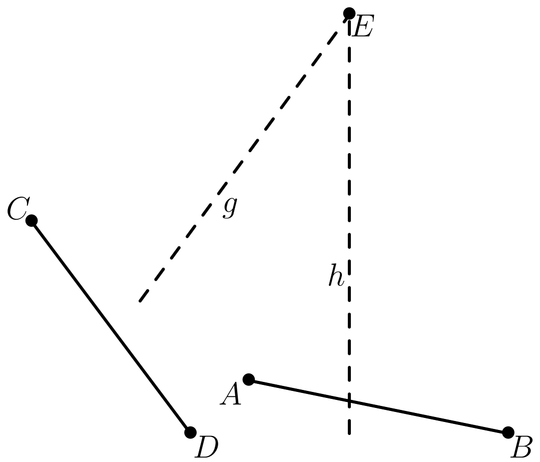
Zeigen Sie, dass es einen Punkt E gibt, für den die beiden Dreiecke ABE und CDE kongruent sind.

Lösung. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden.

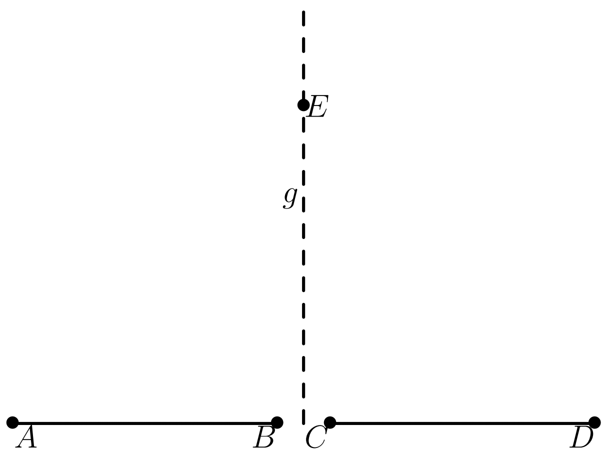
Der erste und häufigste Fall ist der, dass A, B, C, D nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Dann ist – notfalls nach Vertauschung der Namen A und B – die Gerade AC nicht zur Geraden BD parallel. Folglich sind auch die Mittelsenkrechten auf den Strecken $[AC]$ und $[BD]$ nicht parallel und schneiden sich in einem Punkt E. Dieser liegt dann von A und C gleich weit entfernt sowie von B und D. Nach dem SSS-Satz sind damit ABE und CDE kongruent.

Der zweite Fall ist der, dass alle vier Punkte in einer Geraden liegen. Wieder nach Umbenennung der Punkte dürfen wir annehmen, dass B und C zwischen A und D liegen (in welcher Reihenfolge auch immer). Die Mittelsenkrechte von $[AD]$ ist dann auch die von $[BC]$, und jeder Punkt E auf der Mittelsenkrechten, der nicht auf der Geraden AD liegt, leistet – wieder nach SSS – das Gewünschte.

Zwei Skizzen:



g ist die Mittelsenkrechte auf $[AC]$, h die auf $[BD]$.



g ist die Mittelsenkrechte auf $[AD]$ und E ein (fast) beliebiger Punkt darauf.