| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
|---|---|
| | |

---

## Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}.$$

a) Zeige, dass für $0 < x < 1$ stets $x < f(x) < 1$ gilt.

b) Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ und die Ableitung von $f$ in all diesen Punkten.

*Lösung.*
a) Es ist $f(x) = x \cdot \frac{x^2+3}{3x^2+1}$ und daher die Behauptung $x < f(x)$ äquivalent zur Behauptung

$$x^2 + 3 > 3x^2 + 1, \; 0 < x < 1.$$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$$x^2 < 1, \quad 0 < x < 1,$$

was offensichtlich stimmt.
Weiter gilt

$$1 - f(x) = \frac{3x^2 + 1 - (x^3 + 3x)}{3x^2 + 1} = \frac{(1-x)^3}{3x^2 + 1},$$

und da Zähler und Nenner für $x \in (0, 1)$ positiv sind, ist $f(x) < 1$.
b) $f(x) = x$ ist gleichbedeutend zu

$$x^3 + 3x = 3x^3 + x, \quad \text{also zu} \quad x^3 - x = 0.$$

Die drei Lösungen $x = 0, 1, -1$ sind die gesuchten reellen Zahlen.
Die Ableitung von $f$ im Allgemeinen ist

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 1)(3x^2 + 3) - 6x(x^3 + 3x)}{(3x^2 + 1)^2} = \frac{3x^4 - 6x^2 + 3}{(3x^2 + 1)^2} = 3 \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{3x^2 + 1}\right)^2.$$

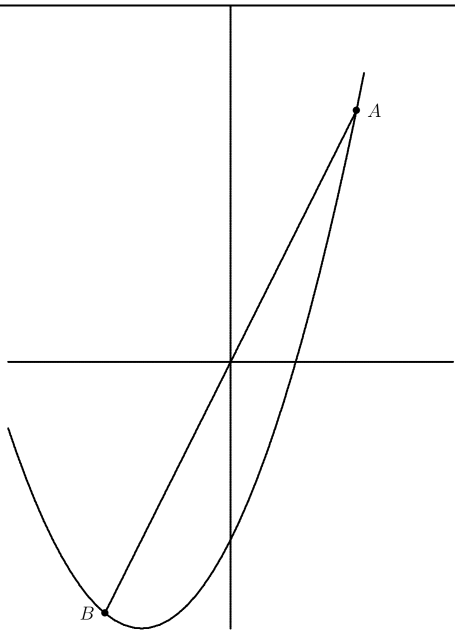
Es folgt

$$f'(1) = f'(-1) = 0, \quad f'(0) = 3.$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

## Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Die Punkte $A$ und $B$ liegen so auf der Parabel $y = 4x^2 + 7x - 1$, dass der Koordinatenursprung der Mittelpunkt der Strecke $AB$ ist.
Berechnen Sie die Länge dieser Strecke.




*Lösung.*
Sei $A = (p \mid q)$ und $p > 0$. Da der Koordinatenursprung der Mittelpunkt von $AB$ ist, gilt $B = (-p \mid -q)$, und daraus folgt mit der Parabelgleichung

$$q = 4p^2 + 7p - 1, \quad -q = 4(-p)^2 + 7(-p) - 1.$$

Addition dieser beiden Gleichungen führt zu

$$0 = 8p^2 - 2, \quad \text{also} \quad p = \frac{1}{2}.$$

Die Parabelgleichung liefert nun

$$q = 7/2.$$

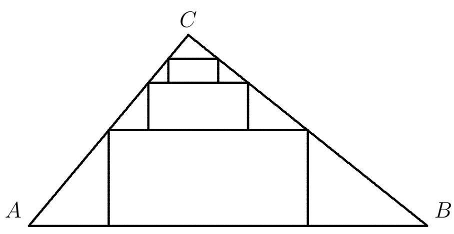
Damit ist der Abstand

$$AB = \sqrt{(2p)^2 + (2q)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

## Aufgabe E 3 (8 Punkte)

In ein rechtwinkliges Dreieck $ABC$ mit Hypotenuse $AB$ und Kathetenlängen $a$ und $b$ wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass zwei Ecken die Mittelpunkte der Katheten sind und eine Kante auf der Hypotenuse liegt. Dieser Prozess wird mit dem Restdreieck, das $C$ als Ecke hat, noch einmal durchgeführt, und immer so weiter.




a) Bestimmen Sie die Fläche des ersten Rechtecks.

b) Welche Fläche hat das dritte Rechteck?
Welche Fläche hat das $n$-te Rechteck?

c) Wenn $a = b$ gilt, welche Bedingung muss dann $a$ erfüllen, damit das vierte Rechteck das erste ist, dessen Flächeninhalt kleiner ist als 10 $\mathrm{m}^2$?

*Lösung.*

a) Die Grundseite des Rechtecks ist die halbe Hypotenuse, die Höhe ist die halbe Höhe des Dreiecks, und damit ist der Flächeninhalt des Rechtecks die Hälfte des Flächeninhalts des Dreiecks, also

$$\frac{1}{4}ab.$$

b) Da das kleine Dreieck oberhalb des ersten Rechtecks aus Dreieck $ABC$ durch Streckung von $C$ aus mit Faktor $1/2$ hervorgeht, hat das zweite Rechteck ein Viertel des Flächeninhalts vom ersten, und analog das dritte wieder ein Viertel davon: Das dritte Rechteck hat Flächeninhalt $\frac{1}{4^3}ab$.

Allgemein hat das $n$-te Rechteck den Flächeninhalt

$$\frac{1}{4^n}ab.$$

c) Nun ist $a = b$ und damit hat das $n$-te Rechteck Flächeninhalt $\frac{1}{4^n}a^2$. Nun soll gelten

$$\frac{1}{4^4}a^2 < 10\mathrm{m}^2 \leq \frac{1}{4^3}a^2,$$

also

$$8\sqrt{10}\mathrm{m} \leq a < 16\sqrt{10}\mathrm{m}.$$

| Teamnummer | Name und Vorname eines Teammitglieds |
| --- | --- |
| | |

## Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Der Bankangestellte Ferdinand Stapel war zwar etwas klein geraten, aber dafür sehr zuverlässig. Er hatte das Geldwesen seines Landes gründlich studiert und wusste gut Bescheid. Es gab Münzen von jedem ganzzahligen Wert.

Eines Tages nun kam ein treuer Kunde in die Filiale, der Geld abheben wollte. Die Zeiten des Onlinebankings waren noch fern und der Kunde war König. Er sagte nun:

„Ich möchte in diesen unsicheren Zeiten lieber mein Geld bei mir tragen und daher mein Konto leeren. Präziser[1] heißt das: Wenn Sie mir einen Dreier geben, dann geht der Rest mit lauter Fünfern, wenn Sie mir einen Achter geben geht der Rest mit Elfern, und wenn Sie mir einen Zweier geben, geht der Rest mit Siebenern."

„Aber ja doch, das sehe ich!", antwortete Ferdinand Stapel.„Sie haben nämlich genau ●●● auf dem Konto."

„Oh, das ist ja mehr als ich dachte!" gab der König zurück.

Wieviel hatte er mindestens auf dem Konto?

*Lösung.*

Es sei $K$ ein Kontostand, der zur Beschreibung des Königs passt. Dann lässt $K$ bei Division durch 5 Rest 3, bei Division durch 7 Rest 2 und bei Division durch 11 Rest 8.

Die Differenz zweier möglicher Kontostände ist demnach durch 5, 7 und 11 teilbar, also durch $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$.

Sieht man nur auf die Bedingung bei Teilbarkeit durch 5, so erhält man die Zahlen

$$3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ 28,\ 33,\ \ldots$$

Von diesen erfüllt genau die 23 gleichzeitig die Bedingung bei Teilbarkeit durch 7. Das heißt, dass $K$ bei Division durch $35 = 5 \cdot 7$ Rest 23 lässt.

Es ist also $K$ eine der Zahlen

$$23,\ 58,\ 93,\ 138,\ 163,\ 208,\ 233,\ 278,\ 303,\ 338,\ 373, \ldots$$

und von diesen erfüllt genau die Zahl 338 die königlichen Erwartungen.

Da der Kontostand aber höher ist als vom König gedacht (und trotzdem die Teilbarkeitsbedingungen erfüllt), ist er mindestens

$$338 + 385 = 723.$$

[1] Das stimmt selbstverständlich nur, wenn man sonst nichts über den Kontostand weiß.