

# Tag der Mathematik 2011

## Einzelwettbewerb

### Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

---

### Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}.$$

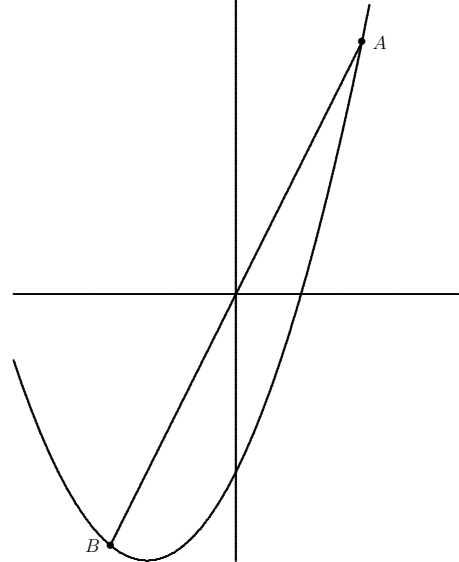
- a) Zeigen Sie, dass für  $0 < x < 1$  stets  $x < f(x) < 1$  gilt.
- b) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$  und die Ableitung von  $f$  in all diesen Punkten.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

### Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Die Punkte  $A$  und  $B$  liegen so auf der Parabel  $y = 4x^2 + 7x - 1$ , dass der Koordinatenursprung der Mittelpunkt der Strecke  $AB$  ist.

Berechnen Sie die Länge dieser Strecke.

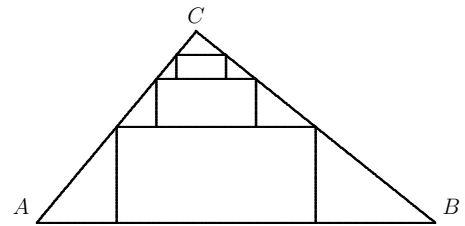


Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

---

### Aufgabe E 3 (8 Punkte)

In ein rechtwinkliges Dreieck  $ABC$  mit Hypotenuse  $AB$  und Kathetenlängen  $a$  und  $b$  wird ein Rechteck so eingeschrieben, dass zwei Ecken die Mittelpunkte der Katheten sind und eine Kante auf der Hypotenuse liegt. Dieser Prozess wird mit dem Restdreieck, das  $C$  als Ecke hat, noch einmal durchgeführt, und immer so weiter.



- Bestimmen Sie die Fläche des ersten Rechtecks.
- Welche Fläche hat das dritte Rechteck?  
Welche Fläche hat das  $n$ -te Rechteck?
- Wenn  $a = b$  gilt, welche Bedingung muss dann  $a$  erfüllen, damit das vierte Rechteck das erste ist, dessen Flächeninhalt kleiner ist als  $10 \text{ m}^2$ ?

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

---

## Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Der Bankangestellte Ferdinand Stapel war zwar etwas klein geraten, aber dafür sehr zuverlässig. Er hatte das Geldwesen seines Landes gründlich studiert und wusste gut Bescheid. Es gab Münzen von jedem ganzzahligen Wert.

Eines Tages nun kam ein treuer Kunde in die Filiale, der Geld abheben wollte. Die Zeiten des Onlinebankings waren noch fern und der Kunde war König. Er sagte nun:

„Ich möchte in diesen unsicheren Zeiten lieber mein Geld bei mir tragen und daher mein Konto leeren. Präziser<sup>1</sup> heißt das: Wenn Sie mir einen Dreier geben, dann geht der Rest mit lauter Fünfern, wenn Sie mir einen Achter geben, geht der Rest mit Elfern, und wenn Sie mir einen Zweier geben, geht der Rest mit Siebenern.“

„Aber ja doch, das sehe ich!“, antwortete Ferdinand Stapel. „Sie haben nämlich genau ●●● auf dem Konto.“

„Oh, das ist ja mehr als ich dachte!“ gab der König zurück.

Wieviel hatte er mindestens auf dem Konto?

---

<sup>1</sup>Das stimmt selbstverständlich nur, wenn man sonst nichts über den Kontostand weiß.