Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Die S-Bahn S3 darf auf der Strecke Karlsruhe-Bruchsal maximal 160 km/h fahren. Der Stromverbrauch für den Betrieb der S3 ist proportional zum Quadrat ihrer Geschwindigkeit. Bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h betragen die Stromkosten für den Antrieb 100 EUR pro Stunde. Außerdem entstehen feste Kosten in Höhe von 400 EUR pro Stunde (Personalkosten, Wartungskosten etc.).

a) Bei welcher Geschwindigkeit sind die Betriebskosten pro gefahrenem Kilometer am geringsten?

b) Im Tagesmittel betragen die Einnahmen 14 EUR pro gefahrenem Kilometer. Wie schnell sollte die S-Bahn fahren, damit der Gesamtgewinn (also die Differenz zwischen Einnahmen und Kosten) pro Stunde möglichst groß wird?

Lösung. Die Geschwindigkeit betrage $x\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. Laut Angabe liegt x zwischen 0 und 160. Die Kosten pro Stunde betragen in Euro $(\frac{x}{50})^2 \cdot 100 + 400 = \frac{x^2}{25} + 400$.

a) Pro gefahrenem Kilometer macht das Kosten von

$$K(x) = \frac{x}{25} + \frac{400}{x}.$$

Es gilt $K'(x) = \frac{1}{25} - \frac{400}{x^2}$. Das wird 0, wenn $x^2 = 25 \cdot 400 = (100)^2$.
Da die Kosten pro Kilometer für $x \searrow 0$ gegen unendlich gehen und für $x > 100$ monoton steigen, werden tatsächlich bei $x = 100$ die Kilometerkosten minimiert.

b) Der Gesamtgewinn pro Stunde ist (in Euro)

$$G(x) = 14x - \frac{x^2}{25} - 400.$$

Die Ableitung hiervon ist

$$G'(x) = 14 - \frac{2x}{25},$$

und das wird 0 genau für $x = \frac{25 \cdot 14}{2} = 25 \cdot 7 = 175$. Da die S3 diese Geschwindigkeit nicht erreicht und damit der Scheitelpunkt des Funktionsgraphen von G (eine nach unten geöffnete Parabel) rechts vom Definitionsbereich von G liegt, wird der maximale Gewinn bei maximaler Geschwindigkeit $x = 160$ erreicht.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Der goldene Schnitt $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1,618033989$ hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass sein Kehrwert

$$\frac{1}{\varphi} \approx 0,618033989\ldots$$

den gleichen Nachkommaanteil hat.

Finden Sie eine andere Zahl $x > 1$ mit dieser Eigenschaft.

Gibt es unendlich viele solcher Zahlen?

Wie viele solche Zahlen gibt es zwischen 1 und 100?

Lösung. Wenn die Zahl $x > 1$ den gleichen Nachkommaanteil wie ihr Kehrwert hat, dann ist x nicht natürlich, denn der Kehrwert liegt echt zwischen 0 und 1. Es gibt also genau eine natürliche Zahl n mit

$$n < x < n+1.$$

Dieses n ist der Vorkommaanteil von x, und der Nachkommaanteil von x ist $x-n$. Es folgt

$$\frac{1}{x} = x - n.$$

Dies führt auf die Gleichung

$$x^2 - nx - 1 = 0, \qquad (*)$$

die die Lösungen $x = \frac{n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}$ besitzt.

Daher ist zum Beispiel für $n = 2$ die Zahl $1+\sqrt{2} = (2+\sqrt{8})/2 \in (2,3)$ eine weitere Zahl der gewünschten Art.

Das Minuszeichen bei der Lösung von $(*)$ liefert eine negative Zahl, da $\sqrt{n^2+4} > n$.

Da andererseits $n+2 > \sqrt{n^2+4}$ gilt, liefert das Pluszeichen tatsächlich eine Zahl, die zwischen n und $n+1$ liegt.

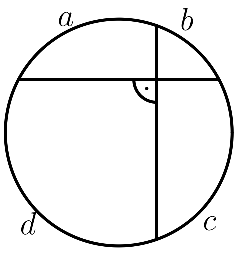
Daher gibt es für jedes natürliche n genau eine Zahl $x \in (n, n+1)$, die denselben Nachkommaanteil wie ihr Kehrwert hat.

Es gibt somit unendlich viele solcher Zahlen, und zwischen 1 und 100 liegen 99.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

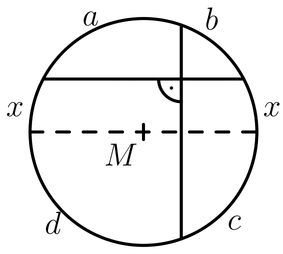
Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Ein Kreis werde durch zwei zueinander senkrechte Sehnen in vier Kreisbögen der Längen a, b, c, d geteilt. Zeigen Sie: $a + c = b + d$.



Lösung.

Verschiebt man die waagrechte Sehne so, dass sie durch den Mittelpunkt M des Kreises geht, so wird a um das gleiche Stück x kleiner, um das c größer wird. Die Summe $a + c$ ändert sich also nicht.



Analog ändert sich die Summe $a + c$ auch dann nicht, wenn man anschließend die senkrechte Sehne in den Mittelpunkt schiebt. Die neuen Kreisbogenstücke sind dann aber Viertelkreise, und damit ist $a + c$ ein halber Umfang. Das gilt auch für $b + d$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Die kleine Hexe Mathenella hat einen neuen Zaubertrick gelernt. Sie kann damit Steine in Apfelsinen, Apfelsinen in Goldstücke, und Goldstücke in Steine verwandeln. Allerdings müssen immer genau drei dieser Gegenstände gleichzeitig verwandelt werden. Von diesen dreien wird dann jeder Stein zu einer Apfelsine, jede Apfelsine zu einem Goldstück, und jedes Goldstück zu einem Stein. So werden mit diesem Zauberspruch zum Beispiel ein Stein und zwei Goldstücke in eine Apfelsine und zwei Steine verwandelt. Zwei Apfelsinen alleine können hingegen nicht verwandelt werden.

a) Kann Mathenella durch mehrmaliges Anwenden dieses Tricks 100 Steine in je 50 Apfelsinen und Goldstücke verwandeln?

b) Kann sie 100 Steine in 100 Goldmünzen verwandeln?

Begründen Sie jeweils die Antwort.

Lösung.

a) Ja, das kann sie tun. Zur Darstellung bezeichnen wir eine Ansammlung von s Steinen, a Apfelsinen und g Goldstücken einfach durch $(s; a; g)$.

Dann macht Mathenella das Folgende:

$$(100; 0; 0) \rightsquigarrow (97; 3; 0) \rightsquigarrow (96; 2; 2).$$

Jetzt muss sie „nur" noch die verbleibenden 96 Steine verwandeln, und das tut sie, in dem sie sie erst in Dreiergruppen zusammenpackt und alle in Apfelsinen verwandelt, sie landet bei $(0; 98; 2)$. Nun macht sie noch 16 Dreierpäckchen Apfelsinen, die sie jeweils in Goldstücke verwandelt, und das führt zu $(0; 50; 50)$.

b) Nein, das kann sie nicht. Denn was auch immer sie tut, bleibt die Differenz der Anzahlen von Apfelsinen und Goldstücken durch 3 teilbar.

Sie kann nämlich σ Steine, α Apfelsinen und γ Goldstücke (mit $\sigma + \alpha + \gamma = 3$) nehmen und verwandeln. Dabei wird aus $(s; a; g)$ dann $(s - \sigma + \gamma; a - \alpha + \sigma; g - \gamma + \alpha)$, und hierbei ist

$$(a - \alpha + \sigma) - (g - \gamma + \alpha) = a - g + \sigma + \gamma - 2\alpha = a - g + 3 - 3\alpha,$$

also wird diese Differenz nur um ein Vielfaches von 3 abgeändert.

Da am Anfang 100 Steine vorliegen, $a - g$ also 0 ist, muss auch am Ende $a - g$ ein Vielfaches von 3 sein. Bei 100 Goldstücken wäre dies nicht der Fall.