Tag der Mathematik 2010

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Sei P ein Punkt im ersten Quadranten, der auf der Parabel liegt, die durch die Gleichung $y = 9 - x^2$ gegeben ist.

Die Tangente an der Parabel im Punkt P schneide die x-Achse im Punkt A und die y-Achse im Punkt B. Der Abstand zwischen A und B heiße d.

Skizziere die beschriebenen geometrischen Objekte.

Für welchen Punkt $P(a|9 - a^2)$ wird d^2 minimal?

Lösung. Aus Platzgründen gibt es keine Skizze.

Die Tangente durch $P(a|9 - a^2)$ ist die Menge aller Punkte

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 9 - a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ -2at \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist der Punkt mit $t = -a$, also $B(0|9 + a^2)$. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist der mit $t = \frac{9-a^2}{2a}$, also $A(\frac{9+a^2}{2a}|0)$.

Das zu minimierende Abstandsquadrat von A nach B

$$d^2 = (9 + a^2)^2 + (9 + a^2)^2/(2a)^2 = (9 + a^2)^2 \cdot (1 + \frac{1}{4a^2}).$$

Wir ersetzen $a^2 = \alpha$ und leiten die erhaltene Funktion nach α ab:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(9 + \alpha)^2 \cdot (1 + \frac{1}{4\alpha}) = (9 + \alpha)^2 \cdot (\frac{-1}{4\alpha^2}) + 2(9 + \alpha) \cdot (1 + \frac{1}{4\alpha}) = (9 + \alpha)(2 + \frac{1}{4\alpha} - \frac{9}{4\alpha^2}).$$

Da α positiv ist, kann das nur 0 werden, wenn der zweite Faktor 0 ist, also wenn (nach Multiplikation mit $4\alpha^2$) gilt:

$$8\alpha^2 + \alpha - 9 = 0.$$

Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist hier

$$\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 288}}{16} = \frac{-1 \pm 17}{16},$$

und da wieder $\alpha > 0$ gilt, muss das $+$-Zeichen gewählt werden: $\alpha = 1$.

Da zwei verschiedene Nullstellen des quadratischen Polynoms vorliegen, ändert die Ableitung auch tatsächlich bei $\alpha = 1$ das Vorzeichen, und zwar von negativ nach positiv: es liegt ein Minimum vor.

Daher ist auch $a = 1$, der gesuchte Punkt ist $P(1|8)$ und d^2 ist dort 125.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Bei einem Glücksspiel beträgt der Einsatz 2 €.

Es werden zwei faire Würfel geworfen.

Bei gleicher Augenzahl erhält der Spieler 5 €.

Ist die Differenz der Augenzahlen 5, werden 10 € ausgezahlt.

Bei einer Augendifferenz von 1 erhält man den Einsatz zurück.

Bei allen anderen Ergebnissen erhält der Spieler nichts zurück.

a) Wie groß ist der durchschnittliche Gewinn bzw. Verlust?

b) Bei welchem Einsatz wäre das Spiel fair, d.h. der durchschnittliche Gewinn 0?

Lösung

a) In 6 von 36 Fällen stimmen die Augenzahlen überein und es werden 5 € ausgezahlt, in 10 Fällen beträgt die Differenz 1 und es wird der Einsatz (2 €) zurückgezahlt, und in zwei Fällen beträgt die Differenz 5, was zu einem Auszahlungsbetrag von 10 € führt. In allen anderen Fällen gibt es nichts zurück. Das macht eine erwartete Rückzahlung von

$$\frac{1}{36}(6\cdot 5\,€+10\cdot 2\,€+2\cdot 10\,€) = \frac{70}{36}\,€ = 2\,€ - \frac{1}{18}\,€,$$

also ist der durchschnittliche Verlust $\frac{1}{18}$ €.

b) Hier muss man berücksichtigen, dass im Fall der Augendifferenz 1 **der Einsatz** zurückgezahlt wird, und Fairness beim Einsatz x € also gewährleistet ist, wenn

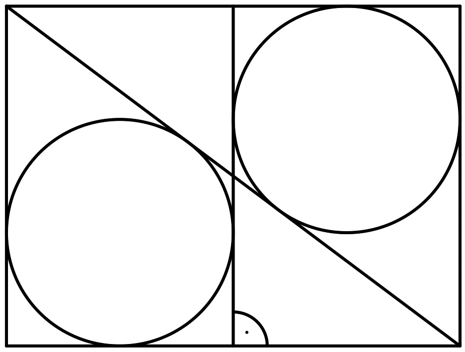
$$36x = 6 \cdot 5 + 10 \cdot x + 2 \cdot 10,$$

also für $x = \frac{50}{26} = \frac{25}{13}$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

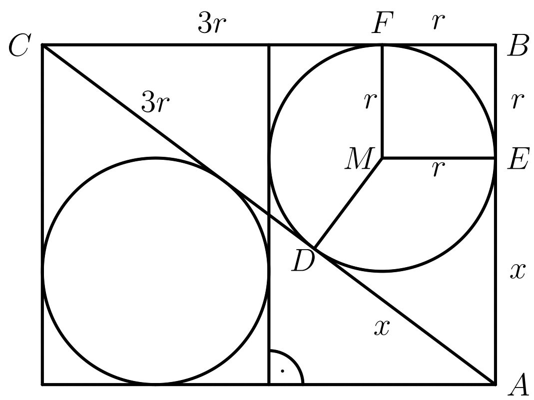
Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Wie groß sind Länge und Breite des Rechtecks, wenn die beiden Kreise denselben Radius r haben?



Lösung.

Wir geben im Bild ein paar Punkten Namen:



D, E und F sind die Berührpunkte des Inkreises im Dreieck ABC, M ist der Inkreismittelpunkt.
Es ist klar, dass die Länge der Kathete BC genau $4r$ ist.
Gesucht ist also noch die Länge der zweiten Kathete.
Das Viereck $MEBF$ ist ein Quadrat mit Kantenlänge r. Das Viereck $CDMF$ ist ein Drachenviereck. Die Längen von $[CD]$ und $[CF]$ stimmen überein und betragen $3r$.

Auch das Viereck $DAEM$ ist ein Drachenviereck. Die Seiten $[DA]$ und $[AE]$ sind gleich lang. Ihre Länge nennen wir x.

Dann folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$(x+r)^2 + (4r)^2 = (x+3r)^2,$$

was nach Auflösen der Klammern und Kürzen von x^2 auf beiden Seiten zu

$$8r^2 = 4rx, \quad \text{also} \quad x = 2r$$

führt.

Die Längen der Seiten des Rechtecks sind demnach $4r$ und $3r$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Es seien A, B, C drei verschiedene Punkte in der x-y-Ebene mit ganzzahligen Koordinaten.

Zeigen Sie:

- Die Quadrate über den Kanten des Dreicks ABC haben ganzzahligen Flächeninhalt.
- Das Doppelte des Flächeninhalts von ABC ist ganzzahlig.
- ABC ist nicht gleichseitig.

Lösung

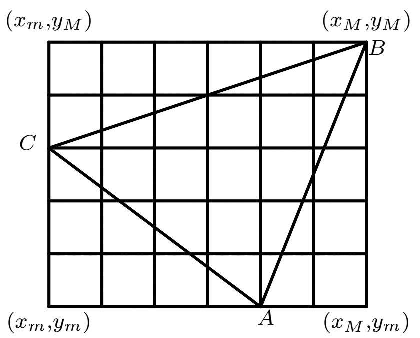
Wir haben ja Koordinaten für die Punkte $A(x_A|y_A)$, $B(x_B|y_B)$ und $C(x_C|y_C)$.

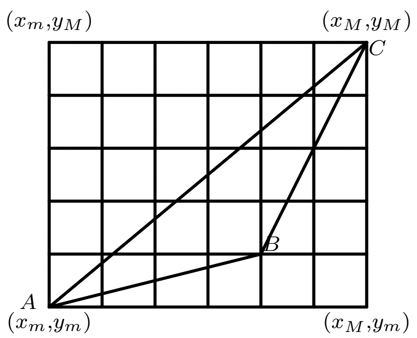
Das Quadrat der Länge der Seite AB ist nach Pythagoras $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$, also eine ganze Zahl, da alle Koordinaten ganzzahlig sind. Genauso geht das für die anderen Seiten.

Es seien x_m der kleinste der Werte x_A, x_B, x_C und x_M der größte dieser Werte, und analog y_m das Minimum von y_A, y_B, y_C sowie y_M das Maximum. Es sei R das Rechteck, das durch die vier Geraden $x = x_m$, $x = x_M$, $y = y_m$ und $y = y_M$ begrenzt wird.

R hat Flächeninhalt $(x_M - x_m) \cdot (y_M - y_m)$, was eine ganze Zahl ist.

Das Dreieck ABC entsteht aus R durch Wegnahme geeigneter rechtwinkliger Dreiecke, deren Katheten allesamt natürliche Längen haben, und eventuell eines Rechtecks mit natürlichen Seitenlängen (siehe Skizze). Daher ist das Doppelte des Flächeninhalts von ABC eine ganze Zahl.





Wäre nun ABC gleichseitig, so wäre der Flächeninhalt gleich $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, wenn a die Länge einer Seite ist. Da aber a^2 ganzzahlig ist und der Flächeninhalt rational, müsste dann auch $\sqrt{3}$ rational sein, was bekanntlich falsch ist.