Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Es sei $F(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$.

a) Zeigen Sie $F(x) + F(1-x) = 1$.

b) Berechnen Sie

$$F(\frac{1}{2011}) + F(\frac{2}{2011}) + \ldots + F(\frac{2010}{2011}).$$

c) Nun sei G eine stetige Funktion mit $G(x) + G(1-x) = 1$.
Welchen Wert hat das Integral $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x$?

Lösung.

a)

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= 1 - \tfrac{9^x}{9^x+3} = \tfrac{3}{9^x+3} \\ &= \tfrac{9}{3\cdot 9^x+9} = \tfrac{9\cdot 9^{-x}}{(3\cdot 9^x+9)\cdot 9^{-x}} \\ &= \tfrac{9^{1-x}}{3+9^{1-x}} = F(1-x). \end{aligned}$$

b) Für jedes $n = 1, \ldots, 2010$ gilt wegen a) $F(\frac{n}{2011}) + F(\frac{2011-n}{2011}) = 1$, und daher lassen sich alle Summanden in der langen Summe in Paaren zusammenfassen, deren Summe jeweils 1 ist. Da die Anzahl der Summanden gerade ist, bleibt am Ende keiner übrig, und es ergibt sich als Wert der Summe genau die Anzahl der Paare, also 1005.

c) Der Graph der Funktion $G(1-x)$ entsteht aus dem der Funktion $G(x)$ durch Spiegelung an der Geraden, die durch $x = \frac{1}{2}$ gegeben ist.
Es folgt $\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 G(1-x)\mathrm{d}x$.
Daher ist

$$\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 G(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 G(1-x)\mathrm{d}x\Big) = \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 [G(x) + G(1-x)]\mathrm{d}x\Big) = \frac{1}{2}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Einer Lösung (a, b) der Gleichung $3a + 4b = 12$ ordnen wir in der $x - y-$Ebene die Strecke mit den Endpunkten $(a \mid 0)$ und $(b \mid 7)$ zu.

a) Bestimmen Sie einige Lösungen der Gleichung.

b) Zeichnen Sie die zu Ihren Lösungen gehörigen Strecken.

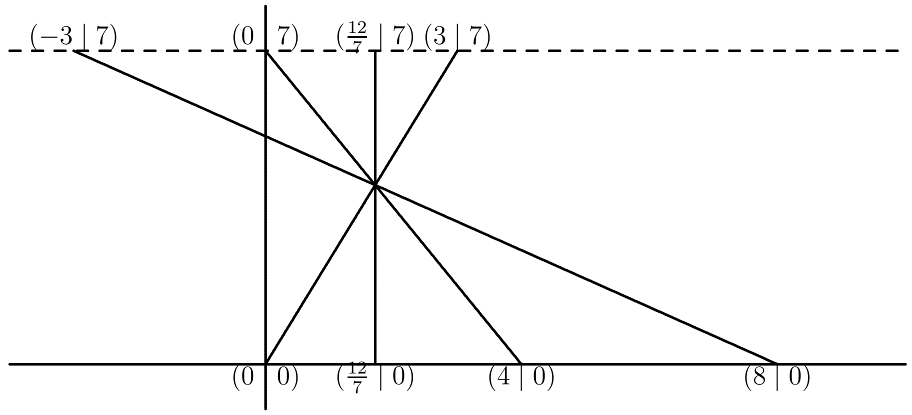
c) Was fällt Ihnen auf? Begründen Sie die beobachtete Tatsache.

Lösung.

a) Einige Lösungspaare sind zum Beispiel

$$(a, b) = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7}),\ (0, 3),\ (4, 0),\ (8, -3).$$

b)



c) Es fällt auf, dass alle Strecken sich in einem Punkt schneiden, und zwar im Punkt $M = (\frac{12}{7} \mid 4)$.

Jede Lösung (a, b) der Gleichung entsteht aus der Lösung $(\frac{12}{7}, \frac{12}{7})$ durch Addition einer Lösung der homogenen Gleichung $3A + 4B = 0$, und diese sind alle von der Gestalt $(4t, -3t)$.

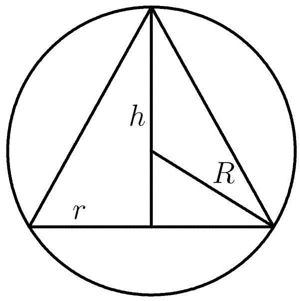
Daher gilt für jede Lösung (a, b) unserer alten Gleichung, dass

$$(a - \frac{12}{7}) = \frac{4}{3}(\frac{12}{7} - b),$$

und mithin sind die Steigungen der Strecken von M zu $(b \mid 7)$ und von M zu $(a \mid 0)$ gleich. M liegt also auf der Strecke von $(b \mid 7)$ nach $(a \mid 0)$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)



Einer Kugel mit dem Radius R soll der gerade Kreiskegel mit dem größten Volumen V einbeschrieben werden.

Berechnen Sie die Höhe h und den Grundkreisradius r des Kegels in Abhängigkeit von R.

Lösung.

Das Volumen des Kegels ist $V = \frac{1}{3}r^2h\pi$.

Das kleinste sichtbare rechtwinklige Dreieck liefert uns hier mit Pythagoras den Zusammenhang

$$R^2 = (h - R)^2 + r^2,$$

also

$$h^2 - 2Rh + r^2 = 0.$$

(Alternativ kann man hier auch mit dem Höhensatz oder dem Kathetensatz argumentieren.)

Wir können also in der Formel für das Volumen r^2 durch h ausdrücken:

$$V = \frac{1}{3}h(2Rh - h^2)\pi.$$

Da für $h = 0$ und $h = 2R$ das Volumen 0 ist, muss zwischendurch ein Maximum angenommen werden. Dieses muss da liegen, wo die Ableitung von V eine Nullstelle hat.

Die Ableitung von V nach h ist

$$\frac{\pi}{3}(4Rh - 3h^2),$$

und dies hat die Nullstellen $h = 0$ (<u>sehr</u> kleiner Kegel) und

$$h_{\max} = \frac{4}{3}R$$

Der zugehörige Radius ist

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{8}{3}R^2 - \frac{16}{9}R^2} = \frac{2R}{3}\sqrt{2}.$$

Dieses sind die gesuchten Größen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

a) Schreiben Sie 31 als Differenz zweier Quadratzahlen.

b) Auf wie viele Arten lässt sich 15 als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben?

c) Begründen Sie, wieso sich jede ungerade Primzahl auf genau eine Art als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lässt.

Lösung.

Wir schreiben mal sicherheitshalber ein paar Quadratzahlen auf:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196,\ 225,\ 256,\ 289,\ldots$$

a) Man sieht: $31 = 256 - 225 = 16^2 - 15^2$.

b) Das geht auf zwei Arten:

$$15 = 16 - 1 = 4^2 - 1^2 \text{ und } 15 = 64 - 49 = 8^2 - 7^2.$$

Mehr Möglichkeiten gibt es nicht, denn die, wo Minuend und Subtrahend kleiner sind als 81 kann man mit unserer Tabelle von Quadratzahlen überprüfen, und für $n \geq 9$ und $k < n$ gilt

$$n^2 - k^2 \geq n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1 \geq 17.$$

c) Wir schreiben die ungerade Primzahl als $p = 2a + 1$. Dann ist

$$p = (a+1)^2 - a^2$$

tatsächlich eine Differenz zweier Quadratzahlen (hier braucht man nur, dass p ungerade ist).

Wenn $p = n^2 - k^2$ gilt mit natürlichen Zahlen $k < n$, so folgt

$$p = n^2 - k^2 = (n-k)(n+k),$$

und damit haben wir p als Produkt zweier natürlicher Zahlen geschrieben. Da p eine Primzahl ist, folgt für den kleineren der Faktoren $n - k = 1$, und damit

$$p = (k+1)^2 - k^2 = 2k + 1,$$

also $k = a,\ n = a + 1$.

Diese Möglichkeit ist also eindeutig.