

Tag der Mathematik 2011

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Es sei $F(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$.

a) Zeigen Sie $F(x) + F(1-x) = 1$.

b) Berechnen Sie

$$F\left(\frac{1}{2011}\right) + F\left(\frac{2}{2011}\right) + \dots + F\left(\frac{2010}{2011}\right).$$

c) Nun sei G eine stetige Funktion mit $G(x) + G(1-x) = 1$.

Welchen Wert hat das Integral $\int_0^1 G(x)dx$?

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Einer Lösung (a, b) der Gleichung $3a + 4b = 12$ ordnen wir in der $x - y$ -Ebene die Strecke mit den Endpunkten $(a \mid 0)$ und $(b \mid 7)$ zu.

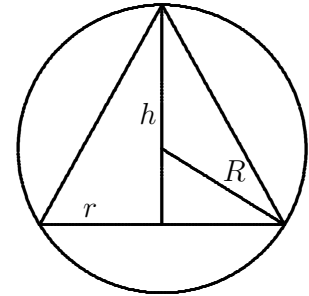
- a) Bestimmen Sie einige Lösungen der Gleichung.
- b) Zeichnen Sie die zu Ihren Lösungen gehörigen Strecken.
- c) Was fällt Ihnen auf? Begründen Sie die beobachtete Tatsache.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Einer Kugel mit dem Radius R soll der gerade Kreiskegel mit dem größten Volumen V eingeschrieben werden.

Berechnen Sie die Höhe h und den Grundkreisradius r des Kegels in Abhängigkeit von R .



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

- a) Schreiben Sie 31 als Differenz zweier Quadratzahlen.
- b) Auf wie viele Arten lässt sich 15 als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben?
- c) Begründen Sie, wieso sich jede ungerade Primzahl auf genau eine Art als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben lässt.