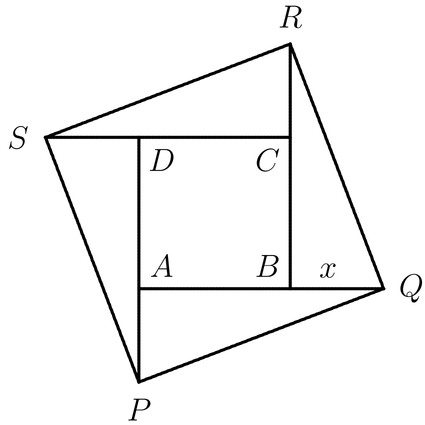
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Um welche Strecke x müssen die Seiten des Einheitsquadrats $ABCD$ verlängert werden, damit die Fläche des Quadrats $PQRS$ doppelt so groß ist wie die von $ABCD$?



Lösung.

Es muss die Länge der Strecke PQ gleich $\sqrt{2}$ sein, und damit gilt

$$(1+x)^2 + x^2 = (\sqrt{2})^2.$$

Es folgt

$$2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad \text{also} \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4}.$$

Aus Vorzeichengründen folgt

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Tatsächlich:

$$\frac{1}{4} \cdot ((\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2) = 2.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie ganze Zahlen a, b, c mit $0 \leq a \leq 2,\ 0 \leq b \leq 4,\ 0 \leq c \leq 6,$ sodass

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{5} + \frac{c}{7} = \frac{158}{105}.$$

Lösung.
Multiplizieren der Gleichung mit 105 liefert

$$35a + 21b + 15c = 158.$$

Da 3 sowohl 21 als auch 15 teilt, muss 3 ein Teiler von

$$158 - 35a$$

sein. Dies gilt nur für $a = 1.$
Da 5 sowohl 35 als auch 15 teilt, muss 5 ein Teiler von

$$158 - 21b$$

sein, was nur für $b = 3$ gilt.
Da 7 sowohl 21 als auch 35 teilt, muss 7 ein Teiler von

$$158 - 15c$$

sein, was im Bereich des Erlaubten $c = 4$ erzwingt.
Tatsächlich gilt

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} = \frac{35 + 63 + 60}{105} = \frac{158}{105}.$$

Also: $a = 1,\ b = 3, c = 4.$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

2 Teams treffen sich nach dem Tag der Mathematik. Fragen die einen die anderen:„Wie viele Punkte hattet Ihr eigentlich in den drei Aufgaben, die Ihr bearbeitet habt?“

Sie erhalten die Antwort:„Das Produkt der Punktzahlen ist 36, ihre Summe ist die Anzahl der von Euch abgegebenen Blätter.“

Das erste Team überlegt kurz, rechnet nach und bemerkt dann:„Etwas mehr Information brauchen wir schon noch.“

Die anderen stutzen, beratschlagen und erwidern dann:„Ihr habt Recht. Also - Unsere beste Aufgabe war die mit der S-Bahn.“

Welche Punktezahlen hatte das Team erreicht?

Lösung.

Mögliche Punkteverteilungen bestehen aus 3 (natürlichen) Zahlen, deren Produkt jeweils 36 ist. Wir sortieren sie der Größe nach und erhalten die Möglichkeiten

Punkte	Summe
1, 1, 36	38
1, 2, 18	21
1, 3, 12	16
1, 4, 9	14
1, 6, 6	13
2, 2, 9	13
2, 3, 6	11
3, 3, 4	10

Da die Kenntnis der Anzahl der abgegebenen Blätter nicht ausreicht, muss die Summe der Punktezahlen mehrfach vorkommen, also 13 sein.

Da es aber **eine** beste Aufgabe gibt, kommt nur die Verteilung 2, 2, 9 in Frage.

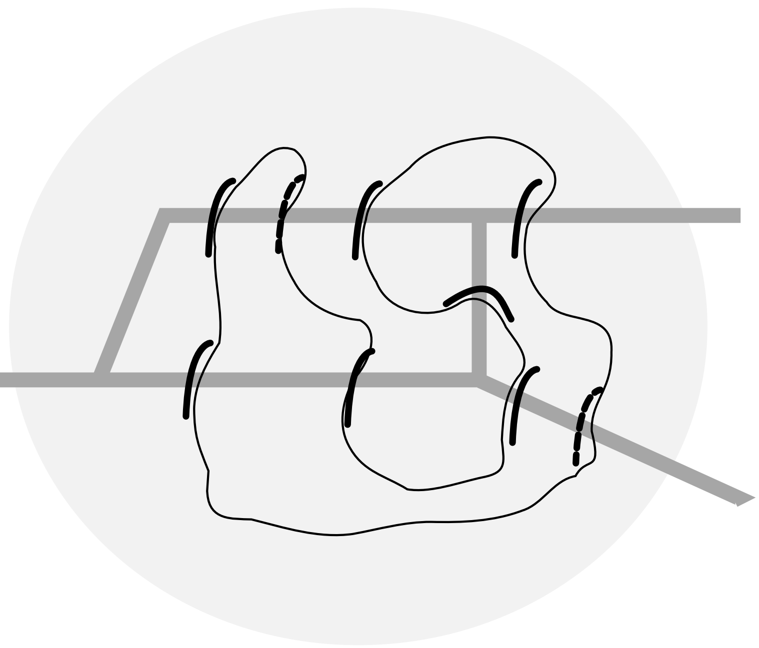
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Die Grafik zeigt einen schematischen Stadtplan des historischen Königsberg. Wie man sieht, gab es damals sieben Brücken über den Fluss Pregel. In jedem der vier Stadtteile konnte man sich beliebig zwischen den Brücken hin- und herbewegen. Leonhard Euler hat bewiesen, dass es keinen Rundweg durch Königsberg geben kann, der genau einmal über jede Brücke führt.

Zeichnen Sie zwei weitere Brücken so ein, dass es doch so einen Rundweg gibt, und geben Sie dann so einen Weg an!

Lösung.



Das Bild zeigt eine mögliche Lösung. Die hinzugefügten Brücken sind gestrichelt eingezeichnet. Euler hat allgemein bewiesen: Ein solcher Rundweg existiert genau dann, wenn sich am Ufer jedes Stadtteiles eine gerade Anzahl Brückenenden befindet.

In der Sprache der Graphentheorie gesagt: In einem (endlichen und zusammenhängenden) Graphen existiert ein Rundweg, der über jede Kante genau einmal führt, genau dann, wenn an jede Ecke eine gerade Anzahl von Kanten angrenzt.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Es sei n eine natürliche Zahl zwischen 520 und 600 (im Zehnersystem).

Was ist die erste Stelle von n im Dreiersystem? (Dabei zählen wir die Stellen von links, die erste Stelle ist also die mit dem höchsten Wert.)

Was ist die erste Stelle von n imIerersystem?

Nun erfülle n die folgenden Bedingungen:

(1) Die zweite Stelle von n im Dreiersystem ist 1.

(2) Die zweite Stelle von n im Vierersystem ist 0.

(3) Die letzte Stelle von n im Zehnersystem ist 2.

Was ist n? (Geben Sie das im Zehnersystem an!)

Lösung.

Die Dreierpotenzen sind

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ldots$$

Im Dreiersystem ist n also sechsstellig, und die erste Ziffer ist 2, denn

$$2 \cdot 243 = 486 \leq 520 \leq 600 \leq 729 = 3 \cdot 243.$$

Die Viererpotenzen sind

$$1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256,\ 1024,\ldots$$

Im Vierersystem ist n also fünfstellig, und die erste Ziffer ist ebenfalls 2.

Wenn die zweite Stelle im Dreiersystem 1 ist, dann ist n nicht kleiner als

$$2 \cdot 3^5 + 3^4 = 486 + 81 = 567.$$

Wenn die zweite Stelle im Vierersystem 0 ist, dann ist n kleiner als

$$2 \cdot 4^4 + 4^3 = 512 + 64 = 576.$$

Folglich gilt $567 \leq n \leq 576$.

Durch die Einerstelle im Zehnersystem wird dann festgelegt, dass $n = 572$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Es werden n kleine Metallkugeln mit 3 m Durchmesser geschmolzen und daraus eine Kugel mit einem Durchmesser von etwa 10 m geformt.

Wie groß ist n?

Lösung.

Das Kugelvolumen ist zur dritten Potenz des Radius proportional.

Die Anzahl n der Kugeln ist daher etwa

$$10^3/3^3 = 1000/27 \approx 999/27 = 37.$$

Also wird wohl $n = 37$ gelten.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Anna, Bert und Clarissa bestimmen jeweils zufällig eine ganze Zahl zwischen -5 und 5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe dieser drei Zahlen 0?

Lösung.

Da jeder der drei eine Zahl aus 11 möglichen auswählt, gibt es insgesamt

$$11^3 = 1331$$

Möglichkeiten.

Es bezeichne a die von Anna gewählte Zahl usw.

Damit die Summe 0 wird, muss $c = -a - b$ gelten. Genau dann liegt c im erlaubten Bereich, wenn $-5 \leq a + b \leq 5$.

Für $a = -5$ gibt es also die 6 Möglichkeiten $b = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Für $a = -4$ gibt es 7 erlaubte Konstellationen, für $a = -3$ 8 Möglichkeiten,... und insgesamt eben

$$6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 = 91$$

Stück.

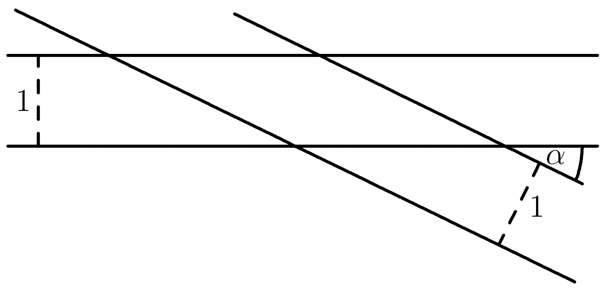
Die Wahrscheinlichkeit ist also

$$\frac{91}{1331} \approx 0.068369646882043576258452291 5.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Zwei Streifen der Breite 1 überschneiden sich in einem Winkel α.
Wie groß ist die Fläche der Überlappung in Abhängigkeit von α?



Lösung. Wir bezeichnen mit d die Seitenlänge des entstehenden Parallelogramms. Dann gilt

$$d \sin(\alpha) = 1,$$

also $d = \frac{1}{\sin(\alpha)}$.
Da die Höhe des Parallelogramms auch 1 ist, ist der Flächeninhalt ebenfalls

$$\frac{1}{\sin(\alpha)}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Die Zahl $\frac{37}{13}$ kann in der Form

$$\frac{37}{13} = 2 + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$$

geschrieben werden, wobei a, b, c natürliche Zahlen sind.

Geben Sie eine mögliche Wahl für a, b, c an.

Wie viele solcher Wahlen gibt es?

Lösung.

Es muss natürlich

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{37}{13} - 2 = \frac{11}{13}$$

gelten, also

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{13}{11} = 1 + \frac{2}{11}.$$

Da $b \geq 1$ und $c > 0$ gilt, ist $0 < \frac{1}{b + \frac{1}{c}} < 1$ und $a = 1$.

Es folgt

$$b + \frac{1}{c} = \frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}.$$

Das ist nicht ganz, also $c > 1$ und damit $\frac{1}{c} < 1$. Es folgt $b = 5$ und $c = 2$.

Tatsächlich ist

$$1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}} = \frac{13}{11}$$

und damit

$$a = 1, b = 5, c = 2$$

eine mögliche Wahl.

Wegen der angeführten Argumente ist das die einzige Lösung.