Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Der fünfstelligen Zahl $F = 3a2b1$ sind die Zehner- und die Tausenderstelle abhanden gekommen. Alles, was man von $a, b \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ weiß, sind die beiden folgenden unabhängigen Bedingungen:

- a hat die Eigenschaft, dass für keine Wahl von b die Zahl F durch 11 teilbar ist.
- b hat die Eigenschaft, dass es zwei Werte für a gibt, sodass die Zahl F durch 9 teilbar ist.

Was sind a und b?

Lösung.

F ist genau dann durch 11 teilbar, wenn die „alternierende Quersumme“ $(3+2+1)-(a+b)$ durch 11 teilbar ist. Für $a \leq 6$ lässt sich das durch $b = 6-a$ realisieren, für $a \geq 8$ wählen wir $b = 17 - a$ und erhalten eine mögliche Ziffer.

Nur für $a = 7$ gibt es kein $b \in \{0, \ldots, 9\}$.

Für Teilbarkeit durch 9 gilt: F ist genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $1 + a + 2 + b + +3$ durch 9 teilbar ist. Da es zwei mögliche Wahlen für a geben soll, müssen diese sich um 9 unterscheiden, also kommt hierfür nur $a = 0$ oder 9 in Frage.

Das erzwingt $b = 3$.

<u>Antwort:</u> $a = 7$, $b = 3$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

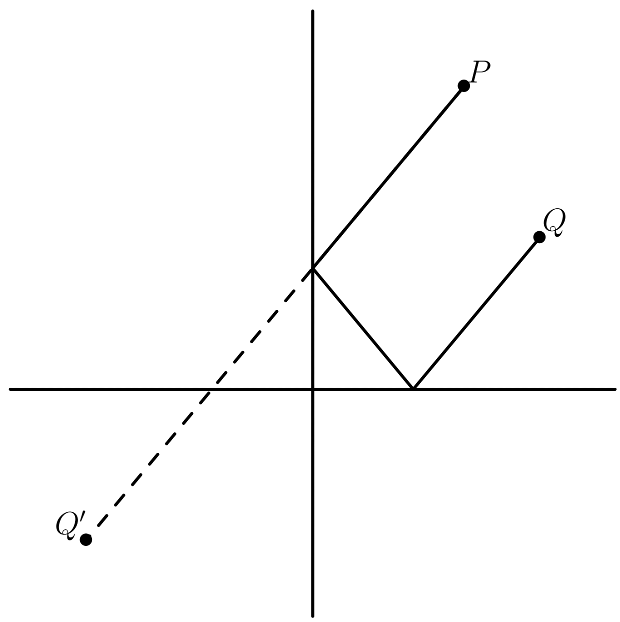
Aufgabe S 2 (4 Punkte)

In der Zeichenebene wird ein Lichtstrahl ausgehend vom Punkt $P(2|4)$ erst an der y-Achse und dann an der x-Achse gespiegelt und durchläuft dann den Punkt $Q(3|2)$.

Skizzieren Sie, was passiert.

Welche Strecke legt der Lichtstrahl von P nach Q zurück?

Lösung.



Der Lichtstrahl legt von P nach Q dieselbe Strecke zurück wie ein unreflektierter Lichtstrahl von P nach $Q'(-3|-2)$. Diese ist nach Pythagoras

$$\sqrt{(2-(-3))^2+(4-(-2))^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Es sei $f(x) = \frac{2x}{3x+4},\ x \neq -\frac{4}{3}$.

Wie muss die Funktion $g(y)$ gewählt werden, damit $f(g(y)) = y$ für alle $y \neq \frac{2}{3}$ gilt?

Was ist dann $g(f(x))$ für $x \neq -\frac{4}{3}$?

Lösung.

Wir müssen die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflösen, um $x = g(y)$ zu finden.

$$\frac{2x}{3x+4} = y \iff 2x - 3xy = 4y \iff x = \frac{4y}{2-3y}.$$

Also ist

$$g(y) = \frac{4y}{2-3y},$$

und tatsächlich ist das für alle $y \neq \frac{2}{3}$ definiert.

Da die obigen Umformungen allesamt Äquivalenzen waren, gilt auch

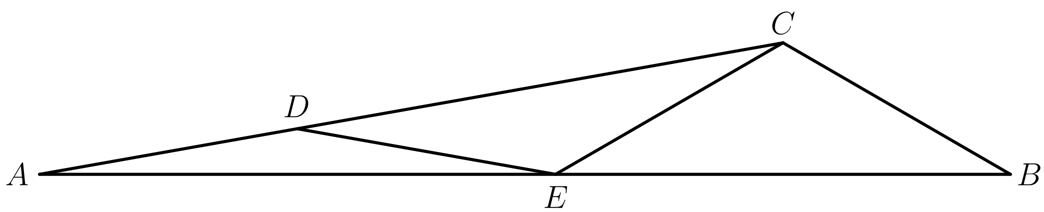
$$g(f(x)) = x,\ x \neq -\frac{4}{3}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

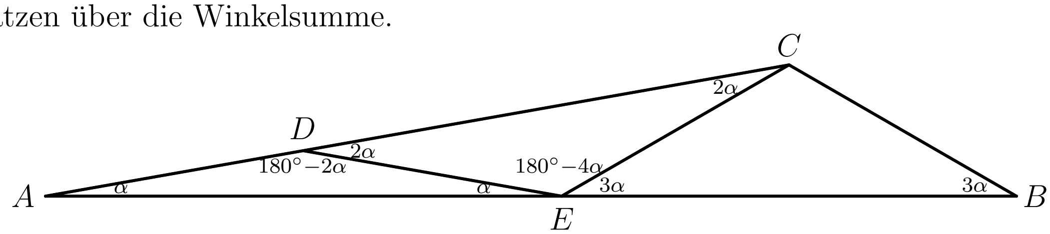
Im Dreieck ABC ist der Innenwinkel bei C $140°$ und die Strecken $[AD]$, $[DE]$, $[EC]$, $[CB]$ sind gleich lang.

Wie groß ist der Innenwinkel bei A?



Lösung.

Wir spendieren ein paar Buchstaben. Beginnend beim gesuchten Innenwinkel α bei A ergeben sich die anderen Winkel aus der Gleichschenkligkeit der kleinen Dreiecke und aus Sätzen über die Winkelsumme.



Die Winkel „schaukeln sich von links nach rechts auf“.

Da der Winkel bei C voraussetzungsgemäß $140°$ ist, folgt aus der Winkelsumme im Dreieck ABC

$$\alpha + 3\alpha = 180° - 140° = 40°,$$

also

$$\alpha = 10°.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Die Seitenflächen eines Quaders seien 18cm^2, $40\ \text{cm}^2$ und $80\ \text{cm}^2$.

Wie groß ist sein Volumen?

Lösung.

Die Längen der Kanten seien $a, b, c,$ wobei

$$ab = 18\text{cm}^2,\ bc = 40\text{cm}^2,\ ac = 80\text{cm}^2.$$

Wegen der letzten beiden Gleichungen ist a doppelt so lang wie b, was nach Einsetzen in die erste Gleichung $b^2 = 9\text{cm}^2$ nach sich zieht.

Es folgt für das Volumen V des Quaders:

$$V = abc = 3\text{cm} \cdot ac = 240\text{cm}^3.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 bedecke die Fläche eines (fest gegebenen) Dreiecks maximal zu 60%. Legt man umgekehrt das Dreieck auf das Quadrat, so bedecke es maximal zwei Drittel der Fläche des Quadrates.

Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

Lösung.

Die größte Fläche, die das Quadrat beim Dreieck überdeckt, ist auch die größte Fläche, die das Dreieck beim Quadrat überdeckt. Folglich gilt für die Flächeninhalte F_{Dreieck} und $F_{\text{Quadrat}} = 36$:

$$0,6 \cdot F_{\text{Dreieck}} = \frac{2}{3} \cdot F_{\text{Quadrat}},$$

also

$$F_{\text{Dreieck}} = \frac{10}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot 36 = 40.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Die natürlichen Zahlen $a < b < c$ seien die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks. Weiter sei h die Länge der Höhe über der Hypotenuse.

Für welche Werte von a, b, c gilt dann

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h} = 1?$$

Lösung.

Wegen $a^2 + b^2 = c^2 \geq (b+1)^2$, ergibt sich die Abschätzung $2b + 1 \leq a^2$. Sie zeigt, dass auf jeden Fall $a \geq 3$ und damit $b \geq 4$ gilt.

Da $a + b \geq c$ gilt, folgt $b \geq \frac{c}{2}$, $h = \frac{ab}{c}$ impliziert $h \geq \frac{a}{2}$. Es folgt

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{h} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a},$$

also $a < 4$.

Es bleibt nur $a = 3$ übrig, und hier finden sich $b = 4$, $c = 5$ als Seitenlängen für ein rechtwinkliges Dreieck. Da $b \leq \frac{a^2-1}{2}$ immer noch gilt, ist es das einzig mögliche ganzzahlige rechtwinklige Dreieck mit $a = 3$. Wegen $h = \frac{12}{5}$ ist hier die gewünschte Gleichung erfüllt.

Die einzig mögliche Wahl für a, b, c ist demnach

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Für welche Paare (a, b) reeller Zahlen gilt

$$a + b = a \cdot b = a^2 - b^2?$$

Lösung.

Wenn $a \cdot b = 0$ ist, dann ist a oder b auch 0, und aus $a + b = a \cdot b$ folgt dann $a = b = 0$.

Wir untersuchen also noch den Fall $a \cdot b \neq 0$. Da dann auch $a + b \neq 0$ gilt, dürfen wir die Gleichung $a + b = a^2 - b^2$ durch $a + b$ teilen, was $a - b = 1$ impliziert. Setzt man $a = b + 1$ in die erste Gleichung ein, so steht da

$$2b + 1 = b^2 + b,$$

also

$$b^2 - b - 1 = 0.$$

Die Lösungen hiervon sind

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

sodass die folgenden drei Lösungen übrigbleiben:

$$a = b = 0; \quad a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Bestimme alle dreistelligen Zahlen abc, für die

$$abc = ab + bc + ca$$

gilt (gemeint sind jeweils Dezimaldarstellungen).

Lösung.

Da eine Summe dreier zweistelliger Zahlen nicht größer als $3 \cdot 99 = 297$ werden kann, ist a gleich 1 oder 2.

Wäre $a = 2$, so wäre $ab + bc + ca \leq 230$, also b gleich $0, 1, 2$ oder 3, was wiederum die stärkere Abschätzung

$$ab + bc + ca \leq 30 + 40 + 100 \leq 170$$

nach sich zieht, was sich mit $a = 2$ nicht verträgt.

Folglich ist $a = 1$.

Da $ab + bc + ca$ dieselbe Einerstelle wie abc besitzt, folgt $a + b = 10$, also $b = 9$.

Dann bekommen wir aber

$$190 + c = 19 + 90 + c + 10 \cdot c + 1 = 110 + 11 \cdot c,$$

also $c = 8$.

Die einzige dreistellige Zahl mit der gewünschten Eigenschaft ist

$$198.$$