

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Für welches x gilt $(10^{2009} + 25)^2 - (10^{2009} - 25)^2 = 10^x$?

Lösung.

Nach der dritten binomischen Formel steht linker Hand

$$(2 \cdot 10^{2009}) \cdot (2 \cdot 25) = 100 \cdot 10^{2009} = 10^{2011}.$$

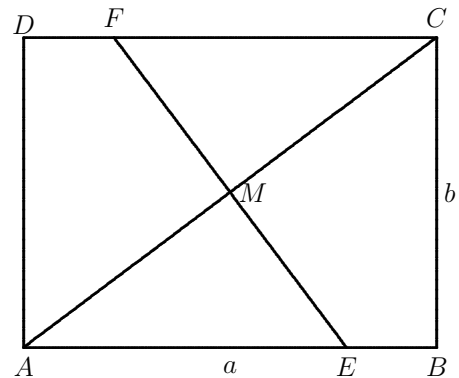
Also ist $x = 2011$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S2 (4 Punkte)

In einem Rechteck $ABCD$ mit $AB > BC$ werden Punkte E auf AB und F auf CD so gewählt, dass $AECF$ eine Raute ist. Ihr Mittelpunkt M ist der Mittelpunkt des Rechtecks.

Berechnen Sie EF in Abhängigkeit von den Längen $AB =: a$ und $BC =: b$.



Lösung.

Die elegante Variante:

Die Dreiecke ABC und CMF sind ähnlich, und es gilt

$$\frac{\frac{1}{2}CA}{\frac{1}{2}EF} = \frac{CM}{MF} = \frac{a}{b}.$$

Daher gilt

$$EF = \frac{b}{a}CA = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Die Hardcore-Variante

Es sei $e = AE = EC$ und $m = EM$. Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck EBC :

$$b^2 + (a - e)^2 = e^2, \quad \text{also } e = \frac{a^2 + b^2}{2a}.$$

Mit dem rechtwinkligen Dreieck ECM sieht man dann

$$m^2 + \frac{a^2 + b^2}{4} = e^2,$$

und Einsetzen von e sowie Auflösen nach m liefert wieder

$$EF = 2m = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Die fünfstellige Zahl $a679b$ ist durch 72 teilbar.

Bestimmen Sie die Ziffern a und b .

Ist die Zahl auch durch 11 teilbar?

Lösung.

Da $a6000$ durch 8 teilbar ist, muss die Zahl $79b$ durch 8 teilbar sein, also

$$b = 2.$$

Die Quersumme von $a6792$ muss durch 9 teilbar sein, also

$$a = 3.$$

Die Zahl 36792 ist nicht durch 11 teilbar (denn $3 - 6 + 7 - 9 + 2 = -3$ ist nicht durch 11 teilbar).

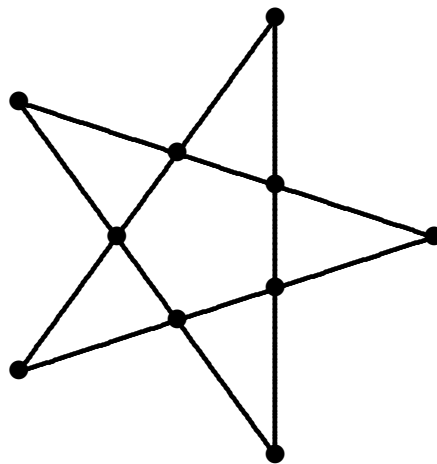
$$36792 = 11 \cdot 3344 + 8.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S4 (4 Punkte)

Zeichne 10 Punkte so in die Ebene, dass es 5 verschiedene Geraden gibt, auf denen je 4 der gegebenen Punkte liegen.

Lösung.

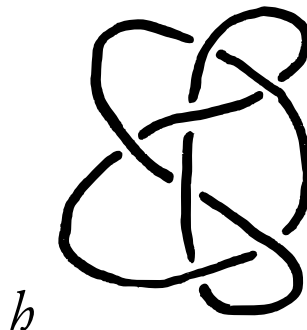
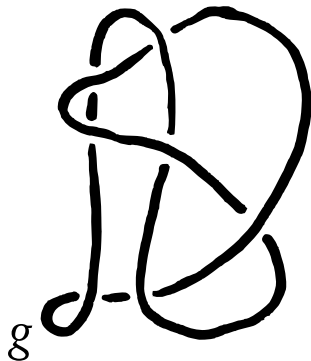
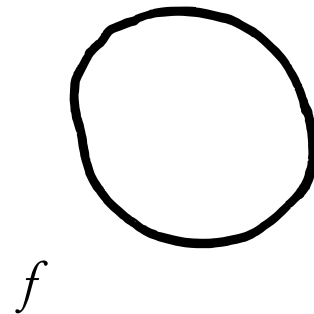
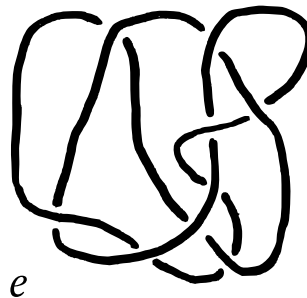
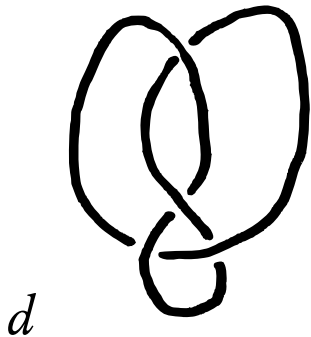
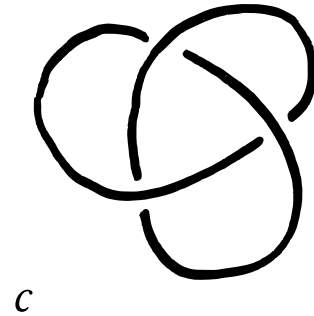
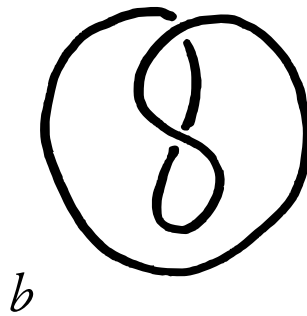
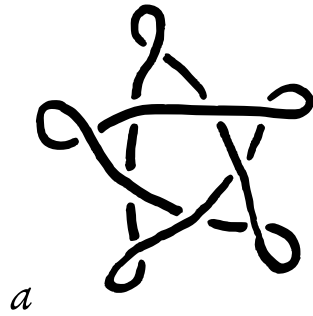


Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Von den folgenden 8 Knoten gehören jeweils 2 zusammen und lassen sich ohne sie zu zerschneiden ineinander verformen.

Finden Sie die 4 Paare!



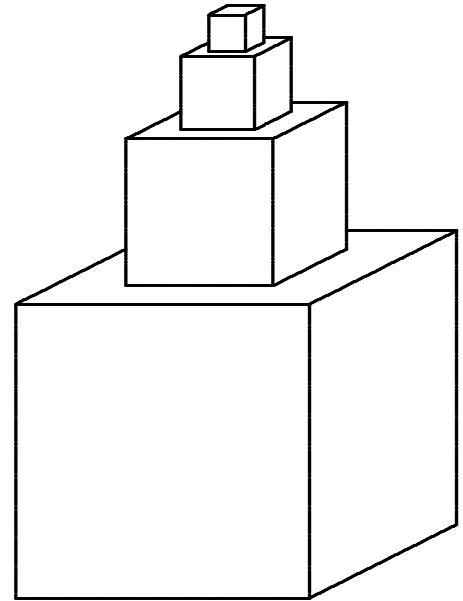
Lösung.

Die Paare sind a-c, b-f, d-g, e-h.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S6 (4 Punkte)

Auf einem Würfel mit Kantenlänge 1 sitzt ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{2}$, auf dem wiederum ein Würfel mit Kantenlänge $\frac{1}{4}$ sitzt und so weiter: Die Kantenlänge wird jedes Mal halbiert. Wenn dies beim vierten Würfel beendet wird, welche Oberfläche hat dann der vierstöckige Würfelturm?



Lösung.

Von oben und unten gesehen ergibt sich jeweils ein Quadrat mit Kantenlänge 1.

Von vorne, hinten, links und rechts hat man jeweils eine Fläche der Größe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}.$$

Insgesamt ist die Oberfläche also

$$2 + 4 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right) = 7\frac{5}{16}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

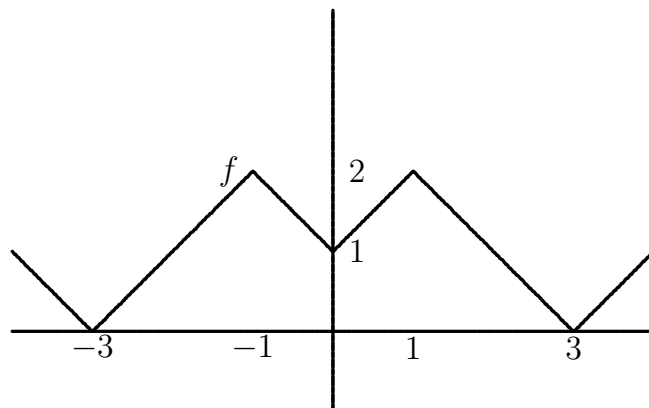
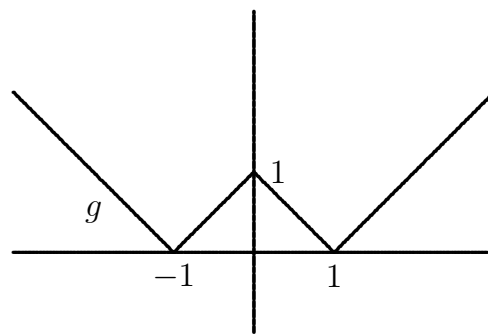
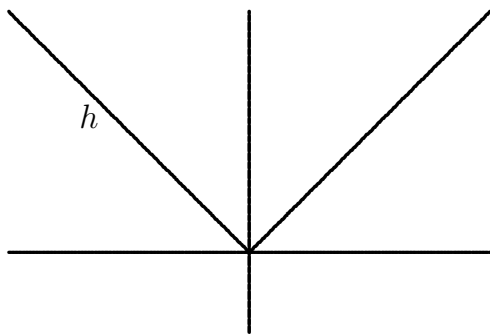
Gegeben seien die Funktionen

$$h(x) = |x|, \quad g(x) = |h(x) - 1|, \quad \text{und} \quad f(x) = |g(x) - 2|.$$

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen in verschiedene Koordinatensysteme.

Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen von f und der x -Achse eingeschlossen wird.

Lösung.

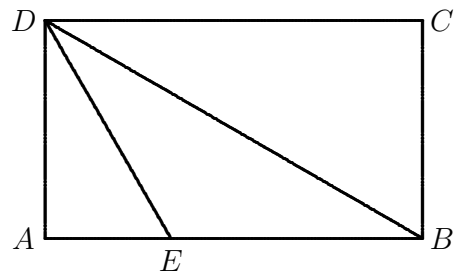


Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der x -Achse ist 7 (wie auch immer man das ausrechnet...).

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S8 (4 Punkte)

Im Rechteck $ABCD$ mit $AD = 1$ wird der Winkel bei D durch DE und die Diagonale BD in drei gleichgroße Teile zerlegt. Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE .



Lösung.

Man kennt die Werte $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$ und $\sin(30^\circ) = 1/2$.

Daher ist das Verhältnis $AB : AD = \sqrt{3}$, also ist die Länge von AB auch $\sqrt{3}$.

Analog ergibt sich die Länge von AE als $1/\sqrt{3}$.

Die Länge von DB ist nach Pythagoras 2, und damit der Umfang des Dreiecks

$$2 + 2 \cdot (\sqrt{3} - 1/\sqrt{3}) = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}} = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Es sei $a, b > 0, a^b = b^a, b = 9a$.

Bestimmen Sie a .

Lösung.

Wegen $a^b = b^a$ gilt

$$a = b^{a/b}.$$

Setzt man nun $b = 9a$ ein, so folgt

$$a = (9a)^{1/9} \quad \text{oder auch} \quad a^9 = 9a.$$

Nun kürzt man a und zieht die achte Wurzel:

$$a = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3}.$$