Tag der Mathematik 2012

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Familie Meier besteht aus Mutter, Vater und mehreren Kindern. Der Vater ist 43 Jahre alt. Das durchschnittliche Alter aller Familienangehörigen ist 15, ohne den Vater ist es 11.

Wie viele Kinder sind in der Familie?

Lösung

Wir bezeichnen die Anzahl der Kinder mit n und die Summe der Alter aller Familienangehörigen mit A. Dann ist

$$\frac{A}{n+2} = 15 \quad \text{und} \quad \frac{A-43}{n+1} = 11.$$

Anders geschrieben ist

$$A = 15(n+2) = 11(n+1) + 43,$$

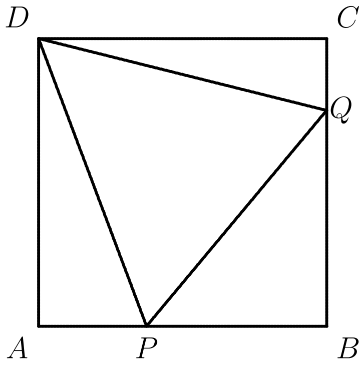
also

$$4n = 24.$$

In der Familie sind 6 Kinder.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 2 (8 Punkte)



Im Einheitsquadrat $ABCD$ werden zwei Punkte P auf AB und Q auf BC so gewählt, dass $BQ = 2 \cdot AP$.

Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit das Dreieck PQD minimale Fläche hat?

Lösung

Es ist

$$AP = x,\ PB = 1 - x,\ BQ = 2x,\ QC = 1 - 2x \text{ und } AD = CD = 1.$$

Die Dreiecke APD, PBQ und QCD haben also (in dieser Reihenfolge) die Flächeninhalte

$$\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{2}2x(1-x) \text{ und } \frac{1}{2}(1-2x).$$

Die Summe dieser Flächeninhalte ist

$$\frac{1}{2}\big(x + 2x(1-x) + (1-2x)\big) = \frac{1}{2} \cdot (1 + x - 2x^2).$$

Der Flächeninhalt von PQD wird also minimal, wenn $f(x) = 1 + x - 2x^2$ maximal wird. Dazu betrachten wir die Ableitung f' von f. Wegen

$$f'(x) = 1 - 4x$$

und weil $f''(x) = -4$ überall negativ ist, wird f bei

$$x = \frac{1}{4}$$

maximal.
Für $x = \frac{1}{4}$ hat das Dreieck PQD minimalen Flächeninhalt.
Dieser ist $\frac{7}{16}$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Für die natürliche Zahl n machen wir uns Gedanken über die Gleichung

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2.$$

a) Rechnen Sie nach, dass diese Gleichung für $n = 1, 2$ und 3 richtig ist.

b) Zeigen Sie, dass aus der Richtigkeit der Gleichung für eine natürliche Zahl n stets auch die Richtigkeit der Gleichung für $n + 1$ folgt.

Hinweis: Hier ist es hilfreich, eine Formel für den Wert von $1 + 2 + \cdots + n$ zu kennen. Diese kann für zwei Punkte bei der Aufsicht eingekauft werden.

Lösung

Für $n = 1$ sagt die Gleichung $1^3 = 1^2$, was stimmt.

Für $n = 2$ steht da $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$, was auch stimmt, denn beide Seiten sind 9.

Für $n = 3$ schließlich ist $1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$, also die Gleichung ebenfalls richtig.

Nun gelte die Gleichung für eine natürliche Zahl n. Das impliziert für $n + 1$ durch Anwendung auf die ersten n Summanden

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n + 1)^3 = (1 + 2 + 3 \cdots + n)^2 + (n + 1)^3. \qquad (*)$$

Aus $2 \cdot (1+2+\cdots+n) = 1+2+\cdots+n+n+(n-1)+\cdots+1 = (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1) = n(n + 1)$ folgt

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2,$$

womit wir auf der rechten Seite in $(*)$ weiterrechnen:

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 + (n + 1)^3 &= \left(\tfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n + 1)^3 = (n + 1)^2 \cdot (\tfrac{n^2}{4} + n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \cdot \tfrac{n^2+4n+4}{4} \\ &= (n + 1)^2 \cdot \tfrac{(n+2)^2}{4} \\ &= \left(\tfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \\ &= (1 + 2 + \cdots + n + (n + 1))^2.\end{aligned}$$

Zusammen mit der Gleichung $(*)$ ist das aber gerade die Gleichung für $n + 1$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Dumpf vor sich hinbrütend saßen die Zecher in der stickigen Spelunke. Fünf Tische gab es hier, und an allen Tischen saßen gleich viele finstere Gesellen, jeweils eine Quadratzahl.

„Wieso so trübsinnig?“ fragte der Neue, der gerade von außen kam.

Und als keiner so recht wusste, woran das lag, schlug er Folgendes vor:

„Lasst uns nach draußen gehen, da ist die Luft so gut. Wenn ich mich nicht vertue, können wir uns da alle an einen großen Tisch setzen, und dieser wäre wieder mit einer Quadratzahl an Leuten besetzt.“

Gesagt getan, und tatsächlich hatte sich der Neue nicht getäuscht.

Wie viele Zecher waren es mindestens, und wieso gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Anzahl der Zecher?

Hinweis: Für die zweite Frage hilft es, die dritte Binomische Formel für Zahlen der Gestalt $a^2 - 5b^2,\ a, b \in \mathbb{N}$ zu benutzen.

Dass es nur endlich viele Menschen gibt, soll außer Acht gelassen werden.

Lösung

Wir tragen in einer Tabelle die ersten paar Quadratzahlen n^2 ab, sowie $5n^2 + 1$. Hierbei ist $5n^2$ die Anzahl der Zecher, und wenn der Neue dazukommt ist das wieder eine Quadratzahl. Wir müssen also sehen, wo die erste Quadratzahl in der letzten Zeile der folgenden Tabelle auftaucht:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$5n^2 + 1$	6	21	46	81	126	181	246	321	406	501

Also ist $n = 4$, und die kleinstmögliche Anzahl der Zecher ist 80.

Um nun zu sehen, dass es unendlich viele Lösungen geben kann, stellen wir die Gleichung

$$5n^2 + 1 = m^2$$

um zu

$$m^2 - 5n^2 = 1.$$

Die linke Seite ist $(m + \sqrt{5}n)(m - \sqrt{5}n)$, und die Idee ist nun, neben der Lösung $n = 4, m = 9$ auch Potenzen der Zahl $9 + 4 \cdot \sqrt{5} > 1$ anzusehen.

Diese werden größer und größer, und daher ist die Anzahl dieser Potenzen unendlich. Wir müssen nur sicherstellen, dass sie auch ganzzahlige Lösungen unserer Ausgangsfrage liefern.

Dafür berechnen wir für eine Potenz $m + \sqrt{5}n$ auch

$$(m + \sqrt{5}n) \cdot (9 + \sqrt{5} \cdot 4) = (20n + 9m) + \sqrt{5}(9n + 4m)$$

und sehen, dass es statt $5n^2 = m^2 - 1$ Zechern derer auch $5(9n + 4m)^2 = (20n + 9m)^2 - 1$ (nachrechnen!) hätten sein können.

Die ersten Lösungspaare sind:

$$(n, m) = (4, 9),\ (72, 161),\ (1292, 2889)\ldots$$