Tag der Mathematik 2012

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Familie Meier besteht aus Mutter, Vater und mehreren Kindern. Der Vater ist 43 Jahre alt. Das durchschnittliche Alter aller Familienangehörigen ist 15, ohne den Vater ist es 11.

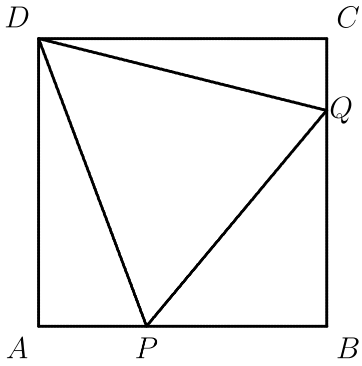
Wie viele Kinder sind in der Familie?

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Im Einheitsquadrat $ABCD$ werden zwei Punkte P auf AB und Q auf BC so gewählt, dass $BQ = 2 \cdot AP$.

Wie muss $x := AP$ gewählt werden, damit das Dreieck PQD minimale Fläche hat?



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Für die natürliche Zahl n machen wir uns Gedanken über die Gleichung

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)^2.$$

a) Rechnen Sie nach, dass diese Gleichung für $n = 1, 2$ und 3 richtig ist.

b) Zeigen Sie, dass aus der Richtigkeit der Gleichung für eine natürliche Zahl n stets auch die Richtigkeit der Gleichung für $n + 1$ folgt.

Hinweis: Hier ist es hilfreich, eine Formel für den Wert von $1 + 2 + \cdots + n$ zu kennen. Diese kann für zwei Punkte bei der Aufsicht eingekauft werden.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Dumpf vor sich hinbrütend saßen die Zecher in der stickigen Spelunke. Fünf Tische gab es hier, und an allen Tischen saßen gleich viele finstere Gesellen, jeweils eine Quadratzahl.

„Wieso so trübsinnig?“ fragte der Neue, der gerade von außen kam.

Und als keiner so recht wusste, woran das lag, schlug er Folgendes vor:

„Lasst uns nach draußen gehen, da ist die Luft so gut. Wenn ich mich nicht vertue, können wir uns da alle an einen großen Tisch setzen, und dieser wäre wieder mit einer Quadratzahl an Leuten besetzt.“

Gesagt getan, und tatsächlich hatte sich der Neue nicht getäuscht.

Wie viele Zecher waren es mindestens, und wieso gibt es unendlich viele Möglichkeiten für die Anzahl der Zecher?

Hinweis: Für die zweite Frage hilft es, die dritte Binomische Formel für Zahlen der Gestalt $a^2 - 5b^2,\ a, b \in \mathbb{N}$ zu benutzen.

Dass es nur endlich viele Menschen gibt, soll außer Acht gelassen werden.