Tag der Mathematik 2012

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

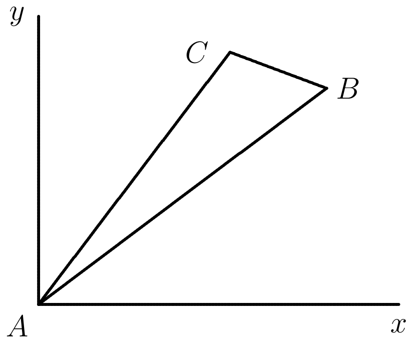
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

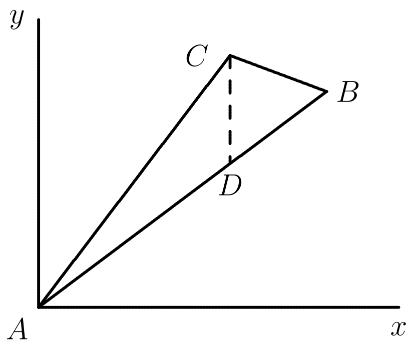
Gegeben sind die Punkte $A(0 \mid 0)$, $B(12 \mid 9)$ und $C(8 \mid c)$.
Für welche c hat das Dreieck ABC die Fläche 24?



Lösung

Wir zeichnen noch die senkrechte Strecke ein, die bei C beginnt und auf der Strecke AB endet. Der Endpunkt dieser Strecke ist D $(8 \mid 6)$.
Die Länge der Strecke CD ist $|6-c|$

Dann gilt, dass der Flächeninhalt von ABC die Summe derer von ADC und von DBC ist.



Über der Strecke CD haben diese Höhe 8 bzw. 4, es ergibt sich also als Flächeninhalt von ABC

$$\frac{1}{2}|6-c|(8+4) = 6 \cdot |6-c|.$$

Der Flächeninhalt ist also genau dann 24, wenn $c = 2$ oder $c = 10$.

Alternativlösung: Auf der Geraden durch A und C liegt genau ein Punkt mit $x = 12$, nämlich $E(12 \mid \frac{3}{2}c)$. Wir bezeichnen mit P den Punkt $(12 \mid 0)$.

Liegt C oberhalb von AB, so ist der Flächeninhalt von ABC die Differenz des Flächeninhalts von APE und der Summe der Flächeninhalte von APB sowie CBE, also

$$\frac{1}{2} \cdot (12 \cdot \frac{3}{2}c - (\frac{3}{2}c - 9) \cdot 4 - 12 \cdot 9) = \frac{1}{2} \cdot (12c - 72).$$

Das ist genau dann 24, wenn $c = 10$.

Wenn C unterhalb von AB liegt, zeigt eine analoge Rechnung, dass $c = 2$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Für die Parabel $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt

(i) $f(x) = f'(x) \cdot f'(x)$,

(ii) $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx = \frac{7}{12}$,

(iii) $f'(1) < 0$.

Bestimmen Sie a, b und c.

Lösung

Es gilt $f'(x) = 2ax + b$, also $f'(x) \cdot f'(x) = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$.
Damit dies gleich $f(x)$ ist, müssen die drei Bedingungen

$$4a^2 = a, \;\; 4ab = b \;\text{ und }\; b^2 = c$$

erfüllt sein. Die erste sagt gerade, dass $a = 0$ oder $a = \frac{1}{4}$.
Aus $a = 0$ würde dann auch $b = 0$ und $c = 0$ folgen, was den restlichen Forderungen an f widerspricht.
Also bleibt $a = \frac{1}{4}$.
Die zweite Bedingung ist dann für jeden Wert von b erfüllt, und dieser legt auch c fest.
Nun ist

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + b^2x\Big|_1^2 = \frac{7}{12} + \frac{3}{2}b + b^2.$$

Dies ist genau dann $\frac{7}{12}$, wenn $\frac{3}{2}b^2 + b = 0$.
Aus $b = 0$ folgte aber

$$f'(1) = 2a + b = \frac{1}{2} + 0 > 0,$$

also ist dies nicht erlaubt.
Es verbleibt die Möglichkeit $b = -\frac{3}{2}$, und damit

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = \frac{9}{4}.$$

Hierfür gilt tatsächlich auch $f'(1) = 2a + b = -1 < 0$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Tom und Jerry gehen unabhängig von einander zweimal jede Woche um 12 Uhr ins gleiche Restaurant zum Essen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich

a) keinmal,

b) genau einmal,

c) zweimal

treffen?

Lösung

Tom und Jerry haben je 21 Möglichkeiten, die beiden Wochentage zu wählen. Es gibt also insgesamt $21 \cdot 21 = 441$ Konstellationen.

a) Die Bedingung, sich nie zu treffen, heißt, dass Jerry für jede von Toms Wahlen nur noch aus 5 Wochentagen auswählen kann, also 10 Wahlmöglichkeiten bleiben.

   Die Wahrscheinlichkeit ist hier demnach $\frac{21 \cdot 10}{21 \cdot 21} = \frac{10}{21}$.

b) Die Bedingung, sich genau einmal zu treffen, heißt, dass Jerry für jede von Toms Wahlen noch 10 eigene Wahlmöglichkeiten hat: einen von Tom gewählten Wochentag und einen nicht von Tom gewählten Wochentag.

   Die Wahrscheinlichkeit ist hier demnach $\frac{21 \cdot 10}{21 \cdot 21} = \frac{10}{21}$.

c) Damit sich Tom und Jerry zweimal treffen können, müssen sie beide Wochentage gleich gewählt haben. Dafür gibt es 21 Möglichkeiten.

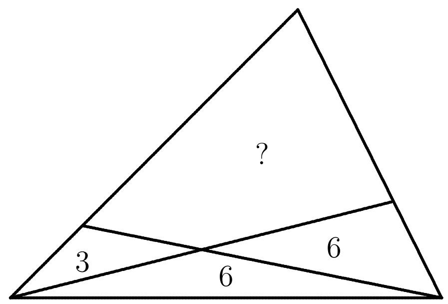
   Die Wahrscheinlichkeit, sich zweimal zu treffen, ist also $1/21$.

Glücklicher Weise ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten tatsächlich 1. Das von vorneherein wissend, hätte man auch jede der drei Teilwahrscheinlichkeiten aus den beiden anderen errechnen können.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

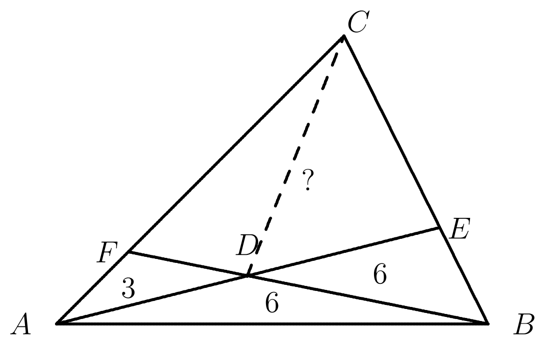
Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Onkel Franz hat seinen dreieckigen Garten wie in der Abbildung zu sehen so unterteilt, dass drei Beete dreieckig sind und eines viereckig. Auf 3m^2 pflanzt er Radieschen und auf jeweils 6m^2 Kohlrabi und Möhren. Wie groß ist das viereckige Beet, auf dem er Kartoffeln anpflanzen will?



Lösung

Wir bezeichnen die Eckpunkte des Gartens mit A, B und C und die gemeinsame Ecke der dreieckigen Beete mit D. Die beiden übrigen Ecken der Dreiecksbeete heißen E und F, wie in der Zeichnung zu sehen.



Da die Dreiecke BDA und BDE denselben Flächeninhalt und dieselbe Höhe haben, sind die Strecken AD und DE gleich lang. Daher sind auch die Flächeninhalte von ADC und DEC gleich.

Da DAB doppelt so groß ist wie ADF, mit diesem aber die Strecke AD gemeinsam hat, ist auch die Strecke DB doppelt so lang wie DF. Daher ist der Flächinhalt von DBC doppelt so groß wie der von FDC.

Wir bezeichnen den Flächeninhalt von FDC mit x und den von DEC mit y.

Dann erhalten wir aus dem Vorangegangenen die Gleichungen

$$x + 3 = y \quad \text{und} \quad 2x = y + 6.$$

Zieht man hier die erste Gleichung von der zweiten ab, so folgt

$$x = 9, \quad y = 12.$$

Onkel Franz kann für seine Kartoffeln demnach 21m^2 seines Gartens nutzen.