Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $0 < a < b < 100$, für die gilt

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{b} - \sqrt{a}.$$

Lösung

Quadrieren der Gleichung liefert

$$a - \sqrt{b} = b - 2\sqrt{ab} + a,$$

und man kann links und rechts a abziehen. Division durch $\sqrt{b}$ liefert dann die Gleichung

$$-1 = \sqrt{b} - 2\sqrt{a}$$

und nach Subtraktion von $\sqrt{b}$ folgt mit nochmaligem Quadrieren

$$1 + 2\sqrt{b} + b = 4a.$$

Das zeigt, dass $\sqrt{b}$ eine rationale Zahl ist, und da b natürlich ist, ist $\sqrt{b}$ auch natürlich: b ist eine Quadratzahl. Außerdem ist b ungerade, da $4a$ und $2\sqrt{b}$ gerade sind.

Dann sagt aber die vorletzte Gleichung, dass wir a aus b durch

$$a = \frac{(\sqrt{b} + 1)^2}{4}$$

berechnen können, zumal aus Vorzeichengründen $\sqrt{a} < \sqrt{b} \leq a$ gelten muss. Die möglichen Paare sind also:

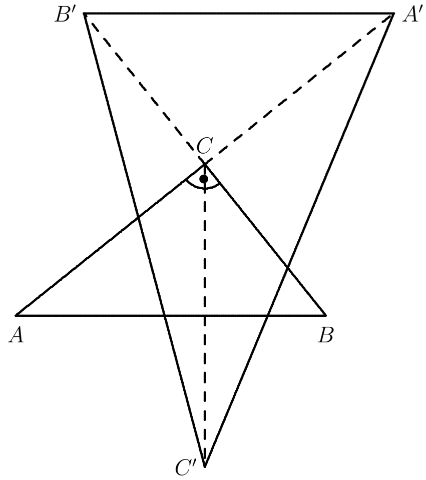
b	9	25	49	81
a	4	9	16	25

NB: Auch Probieren hilft, wenn klar ist, dass es sich bei b um eine Quadratzahl handelt. Die rechnerisch mögliche Lösung $a = b = 1$ ist verboten.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Fläche 1. Spiegle A, B und C an den gegenüberliegenden Dreiecksseiten nach A', B' bzw. C'.
Welche Fläche hat das Dreieck $A'B'C'$?



Lösung

Das Dreieck $A'B'C$ ist kongruent zu ABC, da es rechtwinklig ist und dieselben Kathetenlängen hat. Also ist $A'B'$ genauso lang wie AB.

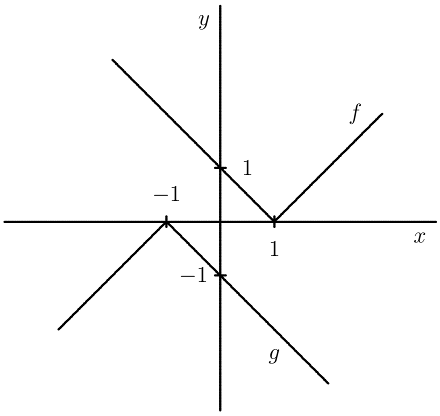
Die Höhe in $A'B'C'$ (über $A'B'$) ist die Höhe von $A'B'C$ plus die Streckenlänge von CC'. Letztere ist das Doppelte der Höhe von ABC, und somit ist insgesamt die Höhe von $A'B'C'$ das Dreifache der Höhe von ABC.

Zusammen zeigt sich, dass der Flächeninhalt von $A'B'C'$ zu Florians großer Freude 3 ist.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Die Funktionen f und g sind im (x, y)-Koordinatensystem dargestellt. f und g entstehen aus $y = |x|$ durch Verschiebung bzw. Verschiebung und Spiegelung.



a) Geben Sie die Gleichungen für f und g an.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $f(x)$ und $g(x)$?

Lösung

a) Es gilt $f(x) = |x - 1|$ und $g(x) = -|x + 1|$.

b) Wir haben den Zusammenhang

$$f(-x) = |-x-1| = |x+1| = -g(x).$$

Alternativ gibt es auch den Zusammenhang

$$-g(x-2) = |x-1| = f(x).$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Auf dem ausgeteilten Ring ist die Oberfläche durch die eingezeichneten Linien in Gebiete unterteilt.

a) Wie viele Gebiete sind das?

b) Nun sollen die Gebiete jeweils einfarbig angestrichen werden.

   Wenn je zwei Gebiete, die eine gemeinsame Grenzlinie haben, mit unterschiedlichen Farben angestrichen werden sollen, wie viele Farben braucht man dann?

Lösung

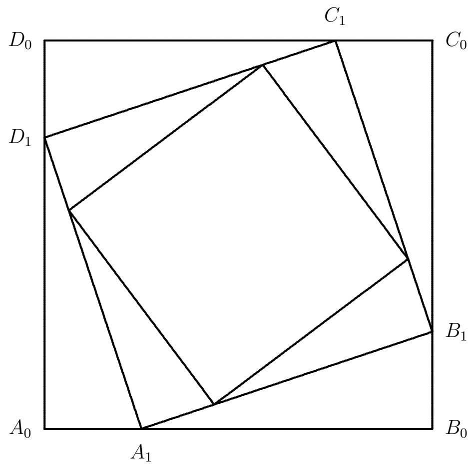
a) 7

b) 7

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

In das Quadrat $A_0B_0C_0D_0$ wird ein Quadrat so eingezeichnet, dass die Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 die Seiten von A_0, B_0, C_0, D_0 im Verhältnis $1 : 3$ teilen. Das nächste Quadrat $A_2B_2C_2D_2$ entsteht entsprechend aus $A_1B_1C_1D_1$, und so weiter.
Sei F_n die Fläche des Quadrates $A_nB_nC_nD_n$. Es sei $F_0 = a^2$.



a) Berechnen Sie F_1 und F_2 in Abhängigkeit von a.

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen F_n und F_{n-1}?

c) Geben Sie eine Formel für F_n an.

Lösung

a) Das rechtwinklige Dreieck $A_0A_1D_1$ hat die Kathetenlängen $\frac{a}{4}$ und $\frac{3a}{4}$. Sein Flächeninhalt ist demnach $\frac{3a^2}{32}$, und damit haben die vier Dreiecke, die beim Übergang vom nullten zum ersten Quadrat abgeschnitten werden, zusammen den Flächeninhalt $\frac{3a^2}{8}$.
Es ist also
$$F_1 = a^2 - \frac{3a^2}{8} = \frac{5a^2}{8}.$$
Mit demselben Argument ist $F_2 = \frac{25}{64}a^2$.

b) Allgemein gilt $F_n = \frac{5}{8}F_{n-1}$.

c) Das ergibt die Formel
$$F_n = (\frac{5}{8})^n a^2.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Berechnen Sie $a^3 + b^3$, wenn $a + b = 5$ und $a \cdot b = 1$ gilt.

Lösung

Es ist

$$(a+b)^3 = a^3 + 3(a+b)(ab) + b^3,$$

also

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3(a+b)ab = 125 - 15 = 110.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Gesucht ist eine vierstellige Zahl mit den folgenden Eigenschaften:

1. Die Summe ihrer Ziffern ist 26, das Produkt ihrer Ziffern ist gerade.
2. Aus ihren Ziffern lassen sich 12 verschiedene vierstellige Zahlen bilden.
3. Die letzten beiden Stellen sind gleich.
4. Die letzten drei Stellen bilden eine Primzahl.

Suchen Sie mit!

Lösung

Es gibt drei verschiedene Ziffern. Mehr können es nicht sein, da die letzten beiden gleich sind, weniger auch nicht, da sonst zu wenig Zahlen gebildet werden könnten. Die Null ist als Ziffer nicht möglich, da 12 **vierstellige** Zahlen gebildet werden können.

Damit 4. erfüllt sein kann, müssen die letzten beiden Ziffern, die ja gleich sind, ungerade sein.

Da das Produkt der Ziffern gerade ist, ist mindestens eine Ziffer gerade, da die Summe der Ziffern gerade ist, müssen also die ersten beiden Stellen gerade sein.

Da die Summe der ersten beiden Ziffern, die ja verschieden und gerade sind, höchstens 14 betragen kann, müssen die letzten beiden Ziffern mindestens $(26 - 14)/2 = 6$ sein, also 7 oder 9.

Für die Bedingung aus 1. verbleiben die Zahlen

$$4877,\ 8477,\ 2699,\ 6299$$

als Kandidaten.

Da 477 und 699 durch 3 teilbar und damit keine Primzahlen sind, scheiden die beiden mittleren Kandidaten im Halbfinale aus.

Schließlich ist auch $299 = 13 \cdot 23$ keine Primzahl, womit nur

$$4877$$

die gesuchte Zahl sein kann.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Die Geraden $y = x + 1$, $y = mx - 1$ und $y = -4x + 2m$ gehen alle durch einen Punkt. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von m.

Lösung

Aus

$$y = x + 1 = mx - 1 = -4x + 2m$$

folgen

$$(m - 1)x = 2 \ \text{ und } \ 5x = 2m - 1.$$

Insbesondere ist $m \neq 1$, da sonst die ersten beiden Geraden parallel sind und sich gar nicht schneiden. Auflösen nach x liefert

$$x = \frac{2}{m-1} = \frac{2m-1}{5}.$$

Dies wiederum führt auf

$$10 = (2m - 1)(m - 1) = 2m^2 - 3m + 1,$$

also

$$2m^2 - 3m - 9 = 0.$$

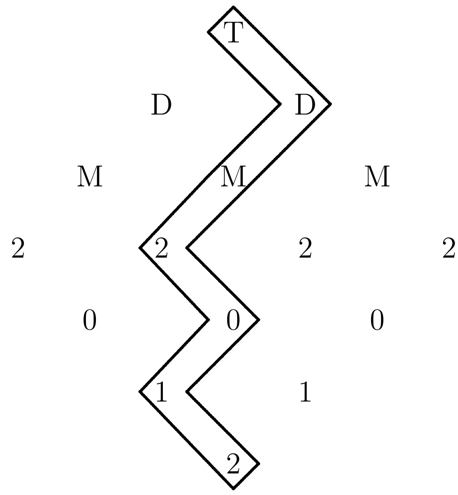
Die Mitternachtsformel liefert die Werte

$$m_{\pm} = 3 \text{ oder } -1,5.$$

Das sind die beiden Möglichkeiten für m.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)



Wie oft ist in dem rechts abgebildeten Zeichenschema „TDM2012“ zu lesen?
Der Übergang von einem Zeichen zum nächsten soll nur zu dem rechts oder links darunter stehenden möglich sein. Eine mögliche Lösung ist markiert.

Lösung

Es gibt genau einen Weg, der durch die ganz rechts stehende 2 läuft, und auch genau einen Weg, der durch die ganz links stehende 2 läuft.

Vom T zur zweiten 2 gibt es drei Wege, und genauso auch von dieser zweiten 2 zur unteren 2. Das macht 9 Möglichkeiten, und aus Symmetriegründen gibt es genauso viele Möglichkeiten, die dritte 2 zu durchlaufen.

Insgesamt ergeben sich 20 Varianten.

Alternativ kann man auch so argumentieren: Es gibt sechs Schritte, von denen genau 3 nach rechts unten gehen müssen, die anderen 3 nach links unten.

Es gibt genau

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(3!)^2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

Möglichkeiten, den Rechtsweg zu wählen.