Tag der Mathematik 2013

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Das kubische Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ habe in $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ Nullstellen. Die Steigung des Graphen von f in diesen Nullstellen sei 1 bzw. 2.

Bestimmen Sie die dritte Nullstelle von f.

Lösung:

Die Steigung des Graphen von f im Punkt $(x \mid f(x))$ ist $f'(x)$.

Wir erhalten also durch die Bedingungen bei x_0 folgende Einschränkungen an die Koeffizienten:

$$0 = f(0) = d,\ 1 = f'(0) = c.$$

Die Einschränkungen bei x_1 erzwingen die Bedingungen (wir verwenden bereits $d = 0, c = 1$):

$$0 = f(1) = a + b + 1,\quad 2 = f'(1) = 3a + 2b + 1.$$

Einsetzen von $b = -1 - a$ in die zweite Gleichung liefert

$$a = 3,\ b = -4.$$

Es folgt $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + x = x(3x^2 - 4x + 1)$.

Gesucht ist die dritte Nullstelle von f, das ist die von 1 verschiedene Nullstelle von $3x^2 - 4x + 1$. Diese Nullstellen sind nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$$\frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = 1 \text{ oder } \frac{1}{3}.$$

Die dritte Nullstelle von f ist also bei $x_2 = \frac{1}{3}$.

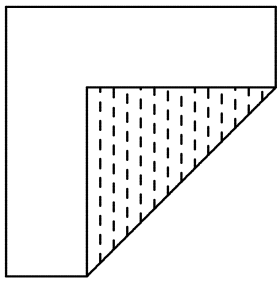
Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Ein quadratisches Blatt Papier mit dem Flächeninhalt 100cm^2 hat vorne und hinten verschiedene Farben.

Nun wird eine Ecke entlang der Diagonalen, auf der sie liegt, so weit umgefaltet, dass die beiden sichtbaren verschieden gefärbten Flächen gleichen Inhalt haben.

Wie weit ist die umgefaltete Ecke von der Faltkante entfernt?



Lösung:

Da beide Farben den gleichen Anteil am Flächeninhalt haben, hat das schraffierte Dreieck Flächeninhalt $\frac{100\text{cm}^2}{3}$, denn hinter dem schraffierten Teil befindet sich noch das Doppelte an weißer Fläche.

Da das schraffierte Dreieck gleichschenklig und rechtwinklig ist, ist der eben angegebene Flächeninhalt auch das Quadrat des gesuchten Abstandes, der sich damit zu

$$\sqrt{3}\frac{10}{3}\text{cm}$$

berechnet.

Alternativ kann man natürlich auch mit der Breite a (in cm) des weißen Restes ansetzen: Dieser hat Flächeninhalt $a \cdot (10 + (10 - a))$, das Dreieck hat Flächeninhalt $(10 - a)^2/2$. Gleichsetzen der Flächeninhalte führt dann auf $a = 10 \cdot (1 - \sqrt{2/3})$, und der Abstand der Ecke zur Kante ist $\frac{\sqrt{2}}{2}(10 - a)$, was wieder die oben angegebene Zahl ergibt.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

a) Für die positiven ganzen Zahlen a, b gelte

$$a^3 - b^3 = 61.$$

Wie groß ist $a^3 + b^3$?

b) Wenn eine Primzahl p sich als Differenz zweier dritter Potenzen schreiben lässt, dann lässt sie bei Division durch 3 den Rest 1.

Woran liegt das?

Hinweis: Gerade in Teil b) kann es hilfreich sein, $a^3 - b^3$ durch $a - b$ zu teilen.

Lösung:

a) Der Abstand zweier aufeinanderfolgender dritter Potenzen ist streng monoton. Sobald man also zwei aufeinanderfolgende dritte Potenzen gefunden hat, deren Differenz mindestens 61 ist, kann es oberhalb davon keine der gewünschten Zahlen a mehr geben.

Wir schreiben uns die kleinsten dritten Potenzen hin:

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216$$

und bemerken, dass $216 - 125 = 91 > 61$. Also muss $a < 6$ gelten. Wir probieren alles durch und sehen

$$61 = 125 - 64 = 5^3 - 4^3.$$

Alle anderen Differenzen der aufgeschriebenen Kuben sind nicht 61. Es folgt $a = 5,\ b = 4$ und

$$a^3 + b^3 = 125 + 64 = 189.$$

b) Wir folgen dem Hinweis und sehen:

$$(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2.$$

Dies lässt sich durch nachträgliches Ausmultiplizieren verifizieren:

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2).$$

Wenn nun $a^3 - b^3 > 0$ gilt, dann ist $a > b$ und $a^2 + ab + b^2 > 1$. Wenn zudem $a^3 - b^3 = p$ eine Primzahl ist, muss also $a - b = 1$ sein, denn das ist ein Teiler von p und der Quotient $p/(a - b) = a^2 + ab + b^2$ ist größer als 1.

Es folgt $a = b + 1$ und Einsetzen in $p = a^2 + ab + b^2$ liefert

$$p = (b + 1)^2 + b(b + 1) + b^2 = 3b^2 + 3b + 1 = 3(b^2 + b) + 1.$$

Dies lässt bei Division durch 3 den Rest 1.

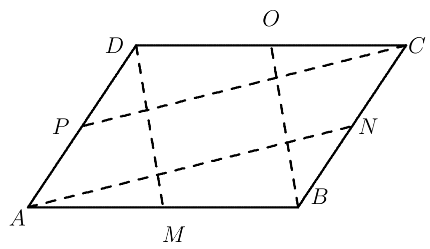
Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Im Parallelogramm $ABCD$ nennen wir die Mittelpunkte der Seiten M, N, O und P.

Die Geraden AN, BO, CP und DM begrenzen ein kleineres Parallelogramm, wie im Bild zu sehen ist.

Welchen Anteil am Flächeninhalt von $ABCD$ nimmt dieses kleine Parallelogramm ein?



Lösung:

Eine von vielen Argumentationsmöglichkeiten ist:

Wenn man eines der kleinen Dreiecke im Bild mit demjenigen kleinen Trapez zusammenfasst, das mit ihm einen Seitenmittelpunkt gemeinsam hat, dann entsteht aus diesen durch Zusammenklappen beim gemeinsamen Seitenmittelpunkt ein Parallelogramm, das zu dem in der Mitte kongruent ist.

Daher ist 5 mal der Flächeninhalt des kleinen Parallelogramms gleich dem des großen.

Der Anteil des Flächeninhalts ist $\frac{1}{5}$.