Tag der Mathematik 2013

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

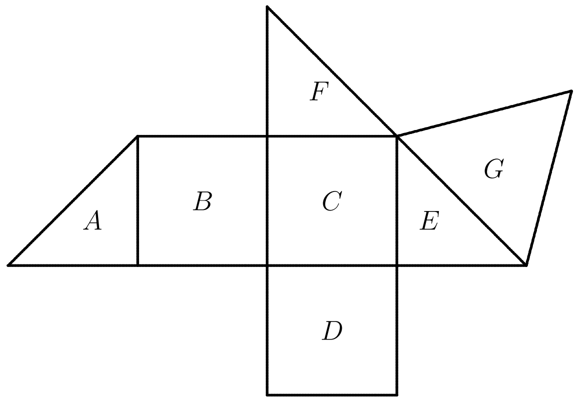
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

In der Abbildung sind B, C, D Einheitsquadrate, A, E, F gleichschenklig rechtwinklige Dreiecke und G ein gleichseitiges Dreieck.

Die Figur kann entlang der Kanten zu einem Polyeder gefaltet werden.

Berechnen Sie das Volumen dieses Polyeders.



Lösung: Das Volumen des Polyeders ist $\frac{5}{6}$.

Denn: Das Polyeder erhält man, indem man von einem Einheitswürfel ein Tetraeder wegnimmt, das eine Ecke und ihre drei Nachbarecken als Ecken hat.

Zunächst meint man, dieses Tetraeder habe als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ und Kanten von Länge 1 zur Spitze. Das stimmt ja auch, aber man tut sich leichter, wenn man das Tetraeder auf eine der Seitenflächen stellt, die ja halbe Quadrate sind:

Die Grundfläche ist ein halbes Einheitsquadrat und die Höhe ist eine Kante des alten Würfels.

Das Volumen des Tetraeders ist $\frac{1}{3} \cdot (\,\text{Grundfläche mal Höhe}\,)$, also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6},$$

und das Volumen des übriggebliebenen Polyeders ist $\frac{5}{6}$.

Etwas mühsamer kann man das Volumen des Tetraeders ausrechnen, wenn das gleichseitige Dreieck die Grundfläche ist. Dessen Flächeninhalt ist $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *die Höhe des Tetraeders ist wegen der rechtwinkligen Seitendreiecke* $\sqrt{1^2 - (\frac{2}{3}\frac{\sqrt{6}}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, *das Volumen ist also (immer noch)* $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x und y gilt

$$\frac{9^x}{3^{x+y}} = 27 \text{ und } \frac{4^{x+y}}{2^{5y}} = 32 \text{ ?}$$

Lösung:

Wegen $9 = 3^2$ und $4 = 2^2$ lassen sich die Gleichungen umformen zu

$$\begin{array}{lrll} \text{1. Gleichung}: & 3^{x-y} & = 3^3, \quad \text{also} & x - y = 3, \\ \text{2. Gleichung}: & 2^{2x-3y} & = 2^5, \quad \text{also} & 2x - 3y = 5. \end{array}$$

Subtraktion des Doppelten der ersten linearen Gleichung von der zweiten eliminiert x, es verbleibt $y = 1$, und Einsetzen in die erste Gleichung liefert $x = 4$.

Die Zahlen sind also $x = 4$, $y = 1$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ und auf dieser ein Punkt $P(p \mid p^2)$, wobei $p > 0$ gelte. Die Tangente an die Parabel im Punkt P nennen wir t.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch P, die auf t senkrecht steht.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes $Q(q \mid q^2)$ von g mit der Parabel.

c) Wie muss P gewählt werden, damit $p^2 + q^2$ minimal wird?

Lösung: Die Ableitung von $y = x^2$ in p ist $2p$, das ist die Steigung der Tangente in P an die Parabel.

a) Die Steigung von g ist demnach $-\frac{1}{2p}$, und wir erhalten eine Gleichung für g durch

$$g : y - p^2 = -\frac{x-p}{2p} \quad \text{also} \quad y = p^2 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2p}.$$

b) Die Schnittpunkte von g mit dem Graphen sind also gegeben durch die Gleichungen

$$y = p^2 + \frac{1}{2} - \frac{x}{2p} \quad \text{und} \quad y = x^2.$$

Dies führt auf

$$x^2 + \frac{x}{2p} - (p^2 + \frac{1}{2}) = 0,$$

also

$$x = p \quad \text{oder} \quad x = -\frac{1}{2p} - p.$$

Der zweite Schnittpunkt von g mit dem Graphen ist demnach

$$Q(-\frac{1}{2p} - p \mid \frac{1}{4p^2} + 1 + p^2).$$

c) $p^2 + q^2 = \frac{1}{4p^2} + 1 + 2p^2 = 1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2}p - \frac{1}{2p})^2$ wird minimal, wenn $\sqrt{2}p = \frac{1}{2p}$, also für $p = 2^{-3/4}$, da p als positiv vorausgesetzt war.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für je zwei ganze Zahlen k, r die Differenz

$$(5k+r)^5 - r^5$$

durch 5 teilbar ist.

b) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl a die Differenz

$$a^5 - a$$

durch 5 teilbar ist.

Hier bietet sich eine Fallunterscheidung nach dem Rest von a bei Division durch 5 an.

c) Geben Sie eine ganze Zahl a an, sodass $a^4 - a$ **nicht** durch 4 teilbar ist.

Hinweis: Der kleine Satz von Fermat sagt, dass für jede Primzahl p und jede ganze Zahl a die Zahl $a^p - a$ ein Vielfaches von p ist. Diesen Satz sollen Sie hier natürlich **nicht verwenden**!

Lösung:

a) Wir multiplizieren geduldig aus:

$$\begin{aligned}
(5k+r)^5 &= (5k+r)((5k+r)^2)^2 \\
&= (5k+r)(5(5k^2+2kr)+r^2)^2 \\
&= (5k+r)(25(5k^2+2kr)^2+10(5k^2+2kr)r^2+r^4) \\
&= 5k \cdot [25(5k^2+2kr)^2+10(5k^2+2kr)r^2+r^4]+ \\
&\quad + r \cdot [25(5k^2+2kr)^2+10(5k^2+2kr)r^2+r^4] \\
&= 5k \cdot [25(5k^2+2kr)^2+10(5k^2+2kr)r^2+r^4]+ \\
&\quad + 5r \cdot [5(5k^2+2kr)^2+2(5k^2+2kr)r^2]+r^5,
\end{aligned}$$

und am Ende steht da ein Vielfaches von 5 plus r^5. Das ist gerade die Behauptung.

b) Für $r = -2, -1, 0, 1, 2$ ist $r^5 = -32, -1, 0, 1, 32$, und offensichtlich ist hier $r^5 - r$ ein Vielfaches von 5.

Nun sei a beliebig. Wir schreiben $a = 5k + r$ mit $-2 \leq r \leq 2$ und rechnen nach:

$$a^5 - a = (5k+r)^5 - r^5 + r^5 - r + r - (5k+r) = [(5k+r)^5 - r^5] + [r^5 - r] - 5k$$

ist eine Summe von Vielfachen von 5, also selbst ein Vielfaches von 5.

c) Für $a = 2$ ist 4 kein Teiler von $a^4 - a = 14$.