

Tag der Mathematik 2013

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

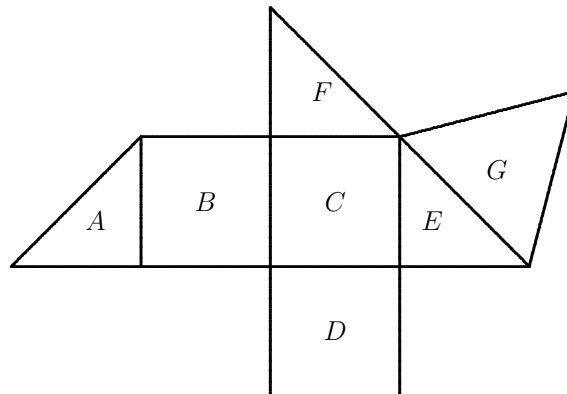
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

In der Abbildung sind B, C, D Einheitsquadrate, A, E, F gleichschenkelig rechtwinklige Dreiecke und G ein gleichseitiges Dreieck.

Die Figur kann entlang der Kanten zu einem Polyeder gefaltet werden.

Berechnen Sie das Volumen dieses Polyeders.



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x und y gilt

$$\frac{9^x}{3^{x+y}} = 27 \quad \text{und} \quad \frac{4^{x+y}}{2^{5y}} = 32 ?$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Gegeben sei die Parabel mit der Gleichung $y = x^2$ und auf dieser ein Punkt $P(p \mid p^2)$, wobei $p > 0$ gelte. Die Tangente an die Parabel im Punkt P nennen wir t .

- Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch P , die auf t senkrecht steht.
- Berechnen Sie die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes $Q(q \mid q^2)$ von g mit der Parabel.
- Wie muss P gewählt werden, damit $p^2 + q^2$ minimal wird?

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

- a) Zeigen Sie, dass für je zwei ganze Zahlen k, r die Differenz

$$(5k + r)^5 - r^5$$

durch 5 teilbar ist.

- b) Zeigen Sie, dass für jede ganze Zahl a die Differenz

$$a^5 - a$$

durch 5 teilbar ist.

Hier bietet sich eine Fallunterscheidung nach dem Rest von a bei Division durch 5 an.

- c) Geben Sie eine ganze Zahl a an, sodass $a^4 - a$ **nicht** durch 4 teilbar ist.

Hinweis: Der kleine Satz von Fermat sagt, dass für jede Primzahl p und jede ganze Zahl a die Zahl $a^p - a$ ein Vielfaches von p ist. Diesen Satz sollen Sie hier natürlich **nicht verwenden!**