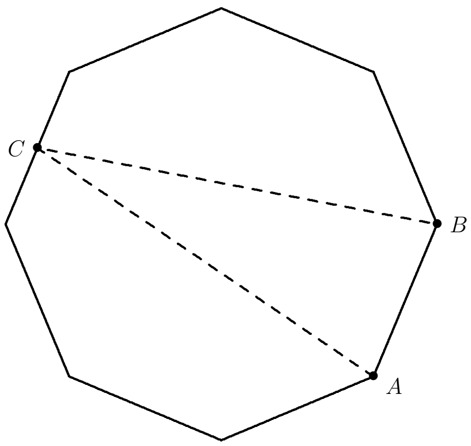
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

In einem regelmäßigen Achteck wird das Dreieck ABC betrachtet, wobei C der Mittelpunkt der Seite ist, die der Seite AB gegenüberliegt.

Welchen Anteil am Flächeninhalt des Achtecks nimmt dieses Dreieck ein?



Lösung:

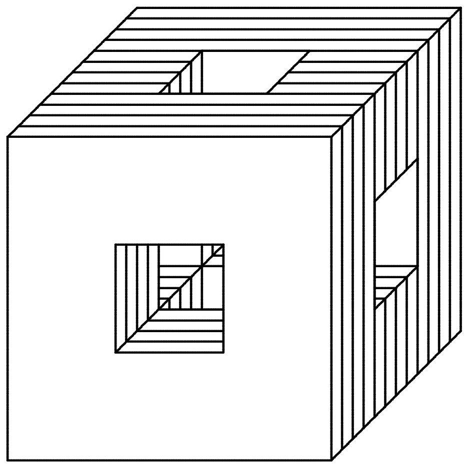
Der Anteil ist $\frac{1}{4}$, denn das Dreieck hat dieselbe Grundfläche wie eines der acht Dreiecke, die durch Einzeichnen der Verbindungsstrecken diametral gegenüberliegender Ecken entstehen, und die doppelte Höhe.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Aus 27 Würfeln der Kantenlänge 1m wird ein großer Würfel der Kantenlänge 3m gebaut. Anschließend entfernt man die mittleren Würfel jeder Seite und den Würfel im Inneren, sodass das abgebildete Objekt übrigbleibt.

Welchen Flächeninhalt hat die gesamte Oberfläche dieses „Schweizer Würfels"?



Lösung: Die Oberfläche hat 72 m^2.

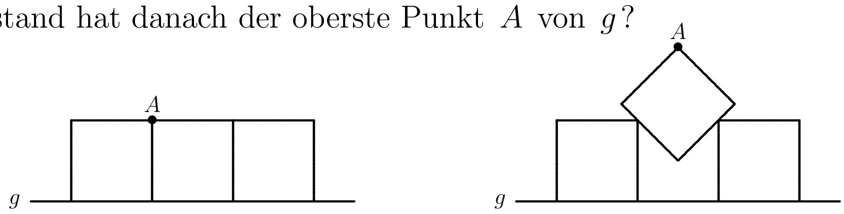
Denn: Wir haben $6 \cdot 8 = 48$ kleine Quadrate auf den Seitenflächen und $6 \cdot 4 = 24$ kleine Quadrate in den Löchern und damit alles abgedeckt.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Von drei Einheitsquadraten auf einer Geraden g (siehe Abbildung) wird das mittlere um $45°$ gedreht und in die Lücke gesetzt.

Welchen Abstand hat danach der oberste Punkt A von g?



Lösung:

Der Abstand ist $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

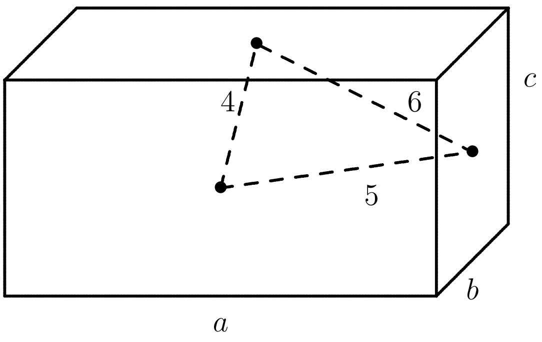
Denn: Die A gegenüberliegende Ecke im gekippten Quadrat ist wegen des $45°$-Winkels der Schnittpunkt der Diagonalen des „leeren" Quadrats, liegt als auf Höhe $\frac{1}{2}$ über g. Dazu kommt dann noch die Länge der Diagonale.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Die Mittelpunkte von drei benachbarten Flächen eines Quaders mit Seitenlängen a, b, c haben die Abstände 4, 5 bzw. 6 (siehe Bild).

Wie groß ist das Volumen abc des Quaders?



Lösung:

Wir haben die Bedingungen

$$a^2 + b^2 = 10^2,\ a^2 + c^2 = 12^2,\ b^2 + c^2 = 8^2.$$

Die Summe der ersten beiden Gleichungen minus die dritte liefert

$$2a^2 = 180, \quad \text{folglich} \quad a = 3\sqrt{10}.$$

Die erste Gleichung liefert damit $b = \sqrt{100 - 90} = \sqrt{10}$ und die zweite $c = \sqrt{144 - 90} = 3\sqrt{6}$.

Das Volumen des Quaders ist demnach

$$abc = 90\sqrt{6}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Treppenhausen ist ein seltsames Dorf. In jeder Straße ist eine Seite unbebaut und auf der anderen Seite stehen genau 10 Häuser nebeneinander. Die Häuser haben 1, 2 oder 3 Stockwerke. Benachbarte Häuser unterscheiden sich in der Höhe um genau ein Stockwerk.

Wie viele Straßen gibt es in Treppenhausen höchstens, wenn die Anordnung der Häuser in jeder Straße verschieden ist?

Lösung:

Wir orientieren die Straßen so, dass die rechte Seite bebaut ist, und numerieren die Häuser aufsteigend von 1 bis 10.

Wenn das erste Haus 2 Stockwerke hat, dann hat das zweite 1 oder 3, das dritte wieder 2, das vierte 1 oder 3 usw. Das gibt bei den gerade Hausnummern 2 Möglichkeiten, bei den ungeraden nur eine, und damit $2^5 = 32$ Straßentypen.

Wenn das erste Haus nicht 2 Stockwerke hat, dann hat das zweite 2 Stockwerke und ähnlich wie im ersten Fall hat jedes gerade Haus 2 Stockwerke, jedes ungerade 1 oder 3, und die können beliebig verteilt werden. Auch das gibt 32 Möglichkeiten.

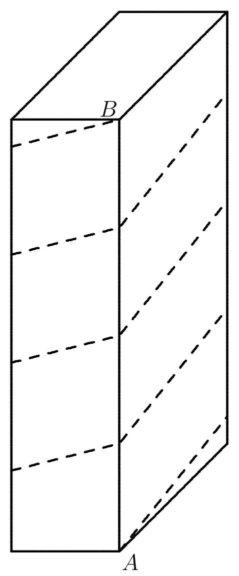
Insgesamt hat Treppenhausen also nicht mehr als 64 Straßen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Um ein Kantholz der Länge 12cm und des Umfangs 4cm soll eine Schnur so gewickelt werden, dass das untere und das obere Ende der Schnur auf den Enden einer Kante zu liegen kommen (im Bild die Punkte A und B) und die Schnur über jede Längsseite des Stabes viermal läuft.

Wie lang muss die Schnur mindestens sein?



Lösung:

Da die Schnur viermal den Stab umlaufen soll, ist sie mindestens so lang wie eine Schnur, die diagonal über ein Rechteck mit Seitenlängen 12 und 16 cm läuft (viermaliges Abwickeln der Mantelfläche des Stabes).

Diese Diagonale hat eine Länge von 20cm.

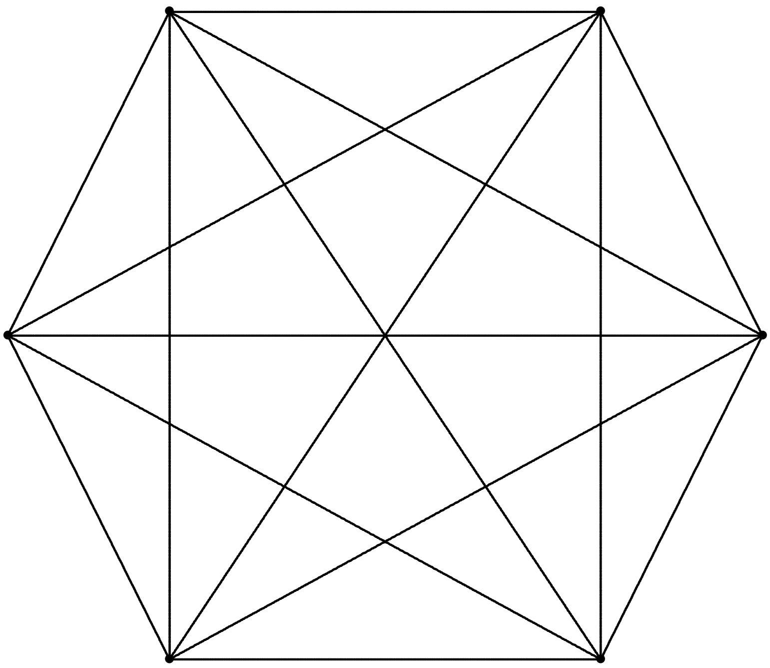
Die Schnur ist also mindestens 20cm lang.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

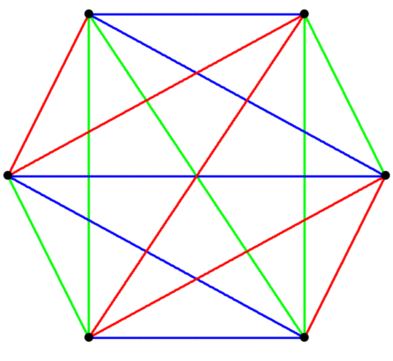
In dieser Aufgabe meinen wir mit „Ecken“ der abgebildeten Figur die 6 markierten Punkte am Rand der Figur und mit „Kante“ jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Ecken.

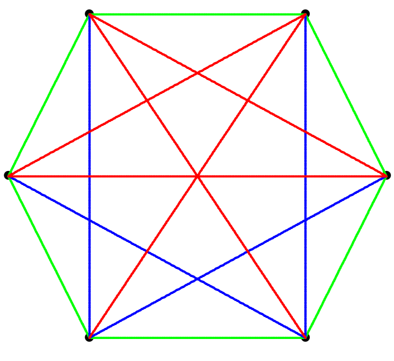
Färben Sie die Kanten mit drei Farben derart, dass am Ende kein einfarbiges Dreieck entstanden ist, dessen Ecken allesamt Ecken der abgebildeten Figur sind.



Lösung:

Hier gibt es viele Lösungen. Zwei davon sind:





Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, bei denen in der Dezimaldarstellung die mittlere Ziffer der Mittelwert der ersten und letzten Ziffer ist?

Bem.: Beispiele für solche Zahlen sind 531 und 420.

Lösung:

Es gibt 9 Wahlmöglichkeiten für die Hunderterziffer, da die Zahl ja dreistellig ist.

Damit der Mittelwert der Hunderter- und der Einerziffer eine ganze Zahl ist, ist notwendig und hinreichend, dass entweder beide Ziffern gerade oder beide ungerade sind.

Für jede Wahl der ersten Ziffer gibt es also 5 Wahlen der dritten, und diese legt die zweite fest.

Die Anzahl der gesuchten Zahlen ist also $9 \cdot 5 = 45$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Wenn ein Gummiball aus Höhe h fallen gelassen wird, so springt er nach dem Bodenkontakt $\frac{3}{4}h$ wieder hoch.

Nun wird ein Ball aus einer Höhe von $h = 8\,\mathrm{m}$ fallen gelassen.

Welchen Weg hat der Ball zurückgelegt, wenn er den Boden das vierte Mal berührt?

Lösung:

Dieser Weg ist

$$\begin{aligned} h + 2\cdot\tfrac{3}{4}h + 2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2 h + 2\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 h &= \left(1 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{9}{8} + \tfrac{27}{32}\right)\cdot h \\ &= \tfrac{32+48+36+27}{32}\cdot h \\ &= \tfrac{143}{32}h = 35\tfrac{3}{4}m. \end{aligned}$$