Tag der Mathematik 2014

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

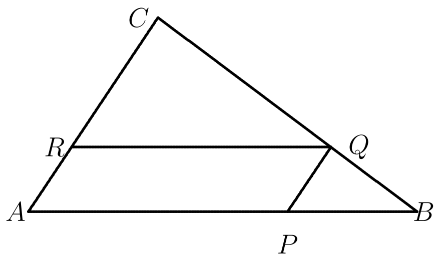
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Im Dreieck ABC seien die Punkte P auf AB, Q auf BC und R auf CA so gewählt, dass $PQ \parallel AC$ und $RQ \parallel AB$.



Wie muss P gewählt werden, damit die Fläche des Parallelogramms $APQR$ maximal wird?

Lösung

Wir setzen $AP : AB = x$. Der Flächeninhalt F des Parallelogramms ist der Flächeninhalt F_Δ des Dreiecks ABC abzüglich der Flächeninhalte der kleinen Dreiecke.

PBQ ist ähnlich zum Dreieck ABC, wobei der Streckungsfaktor $1-x$ ist. RQC ist ähnlich zum Dreieck ABC, wobei der Streckungsfaktor x ist.

Der Flächeninhalt von PBQ ist daher $(1-x)^2 F_\Delta$, der von RQC ist $x^2 F_\Delta$.

Es folgt

$$F = (1 - ((1-x)^2 + x^2))F_\Delta = (2x - 2x^2)F_\Delta.$$

Wir müssen demnach erkennen, wo $f(x) = x - x^2$ maximal wird. Dazu leiten wir f ab: $f'(x) = 1 - 2x$. Dies hat als Nullstelle $x = \frac{1}{2}$, und tatsächlich liegt hier ein Maximum vor, da die Ableitung sonst keine Nullstelle hat und die zweite Ableitung von f überall negativ ist.

Also: Wenn P der Seitenmittelpunkt von AB ist, dann hat $APQR$ maximalen Flächeninhalt.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Die natürliche Zahl k lasse bei Division durch 5 Rest r, das heißt,

$$k = 5a + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Zeigen Sie, dass k^4 und r^4 denselben Rest bei Division durch 5 lassen.

Welche Werte kann dieser Rest annehmen?

Was ist der Rest von $k^5 - k$ bei Division durch 5?

Lösung

Es ist

$$\begin{aligned} k^4 &= (5a + r)^4 = (25a^2 + 10ar + r^2)^2 \\ &= (5(5a^2 + 2ar) + r^2)^2 \\ &= 25(5a^2 + 2ar)^2 + 10(5a^2 + 2ar)r^2 + r^4 \\ &= 5 \cdot (5(5a^2 + 2ar)^2 + 2(5a^2 + 2ar)r^2) + r^4. \end{aligned}$$

Also unterscheiden sich k^4 und r^4 um eine durch 5 teilbare Zahl, und das war die Behauptung.

Der Rest von r^4 bei Division durch 5 kann die Werte 0 und 1 annehmen, wie die folgende Tabelle zeigt:

$r =$	0	1	2	3	4
$r^4 =$	0	1	16	81	256
Rest =	0	1	1	1	1

Wenn k durch 5 teilbar ist, dann ist der Rest von $k^5 - k$ bei Division durch 5 natürlich 0, denn auch k^5 ist durch 5 teilbar.

Ist k nicht durch 5 teilbar, so ist $k^4 = 5b + 1$ für eine ganze Zahl b (siehe Tabelle).

Es folgt, dass

$$k^5 - k = (k^4 - 1) \cdot k$$

durch 5 teilbar ist, da dies für den ersten Faktor gilt.

Damit ist $k^5 - k$ immer durch 5 teilbar, lässt also bei Division durch 5 immer Rest 0.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Die Parabeln $y = x^2$ und $y = -(x-4)^2$ besitzen zwei gemeinsame Tangenten.

Geben Sie Gleichungen für diese Tangenten an.

Lösung

Wir machen den Ansatz $y = mx + t$ für die Gleichung der Tangenten. Es gibt demnach Zahlen x_0, x_1 sodass

$$mx_0 + t = x_0^2 \text{ und } m = 2x_0$$

sowie

$$mx_1 + t = -(x_1 - 4)^2 \text{ und } m = -2(x_1 - 4),$$

wobei die erste Gleichung jeweils den Schnittpunkt der Geraden mit einer der Parabeln liefert und die zweite für die richtige Steigung sorgt.

Wir sehen an den jeweils zweiten Gleichungen, dass $x_0 + x_1 = 4$.

Die ersten Gleichungen liefern dann

$$mx_0 + t = x_0^2 = (4 - x_1)^2 = -mx_1 - t = -4m + mx_0 - t,$$

also $t = -2m = -4x_0$. Einsetzen in die erste Gleichung führt auf

$$2x_0^2 - 4x_0 = x_0^2,$$

was $x_0 = 0$ oder $x_0 = 4$ nach sich zieht.

Die beiden Tangenten sind also durch die Gleichungen $y = 0$ (x-Achse) und durch $y = 4x - 8$ gegeben.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Es sei $f(x) = x^6 + a_5x^5 + \ldots + a_1x + a_0$ ein Polynom von Grad 6, für das es Polynome g und h gibt, sodass

$$f = g^2 = h^3.$$

Was sind die Grade von g und h? Wieso hat g eine Nullstelle? Wieso hat auch h diese Nullstelle?

Begründen Sie, wieso f eine Nullstelle c hat und $f(x) = (x - c)^6$ gilt.

Lösung

Da der Grad von g^2 das Doppelte des Grades von g ist, muss g Grad 3 haben. Der Grad von h^3 ist das Dreifache des Grades von h, also muss h Grad 2 haben.

Da g als Polynom von ungeradem Grad für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ verschiedene Vorzeichen annimmt, muss es aufgrund der Stetigkeit von Polynomfunktionen zwischendurch eine Nullstelle haben. Wir nennen diese Nullstelle c.

Es gilt dann

$$0 = g(c)^2 = f(c) = h(c)^3,$$

also ist auch $f(c) = 0$ und $h(c) = 0$.

Da c eine mindestens dreifache Nullstelle von $f(x) = h(x)^3$ ist, muss es mindestens eine doppelte Nullstelle von g sein, sonst wäre es ja nur eine doppelte von $g(x)^2 = f(x)$. Dann ist es aber eine vierfache Nullstelle von $f(x)$ und damit eine (mindestens) doppelte von $h(x)$, sonst wäre es ja nur eine dreifache von $f(x)$. Es ist also $h(x) = a \cdot (x - c)^2$ für eine reelle Zahl a, wobei $a^3 = 1$ gelten muss, da $a^3 \cdot (x - c)^3 = h(x)^3 = f(x)$ Leitkoeffizient 1 hat.

Es folgt $f(x) = (x - c)^6$.