

Tag der Mathematik 2014

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

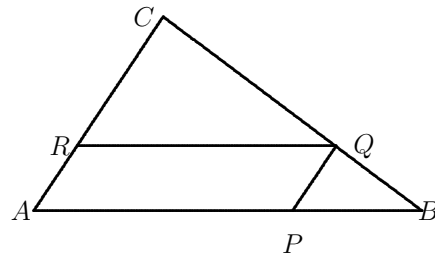
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Im Dreieck ABC seien die Punkte P auf AB , Q auf BC und R auf CA so gewählt, dass $PQ \parallel AC$ und $RQ \parallel AB$.



Wie muss P gewählt werden, damit die Fläche des Parallelogramms $APQR$ maximal wird?

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Die natürliche Zahl k lasse bei Division durch 5 Rest r , das heißt,

$$k = 5a + r, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Zeigen Sie, dass k^4 und r^4 denselben Rest bei Division durch 5 lassen.

Welche Werte kann dieser Rest annehmen?

Was ist der Rest von $k^5 - k$ bei Division durch 5?

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Die Parabeln $y = x^2$ und $y = -(x - 4)^2$ besitzen zwei gemeinsame Tangenten.
Geben Sie Gleichungen für diese Tangenten an.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Es sei $f(x) = x^6 + a_5x^5 + \dots + a_1x + a_0$ ein Polynom von Grad 6, für das es Polynome g und h gibt, sodass

$$f = g^2 = h^3.$$

Was sind die Grade von g und h ? Wieso hat g eine Nullstelle? Wieso hat auch h diese Nullstelle?

Begründen Sie, wieso f eine Nullstelle c hat und $f(x) = (x - c)^6$ gilt.