Tag der Mathematik 2014

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Seien a, b, c ganze Zahlen und p eine Primzahl. Weiter seien jeweils p^k, p^l bzw. p^m die höchsten Potenzen von p, die $a-b$, $b-c$ bzw. $c-a$ teilen.

Zeigen Sie: Mindestens zwei der Zahlen k, l, m sind gleich.

Lösung

Es gibt ganze Zahlen r, s, t, die keine Vielfachen von p sind und derart, dass

$$a-b = rp^k, \; b-c = sp^l \text{ und } c-a = tp^m$$

gilt.

Dabei können wir uns von vorneherein die Zahlen so sortiert denken, dass

$$k \leq l \leq m.$$

Nun gilt jedoch

$$rp^k = a-b = -(b-c)-(c-a) = -sp^l - tp^m = p^l \cdot (-s - tp^{m-l}).$$

Division durch p^k liefert

$$r = p^{l-k} \cdot (-s - tp^{m-l}).$$

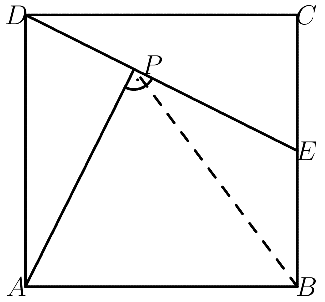
Wäre nun $k < l$, so wäre p immer noch ein Teiler der rechten Seite, also auch von r. Das jedoch war ausgeschlossen.

Daher muss $k = l$ gelten.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$. Sei E der Mittelpunkt von BC und P der Fußpunkt des Lotes von A auf DE.

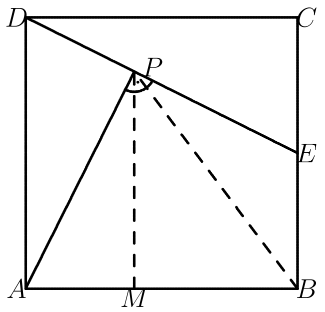


Zeigen Sie: Die Strecken PB und AB sind gleichlang.

Lösung

Wir nennen die Kantenlänge des Quadrates x. Nach Pythagoras ist die Länge von DE gleich $\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

Die Dreiecke DAP und DEC sind ähnlich, da sie beide rechtwinklig sind und – wegen der Winkelsumme im Dreieck – der Innenwinkel des ersten bei A gleich dem Innenwinkel des zweiten bei D ist. Also ist die Länge von AP gleich $\frac{2}{\sqrt{5}}x$.



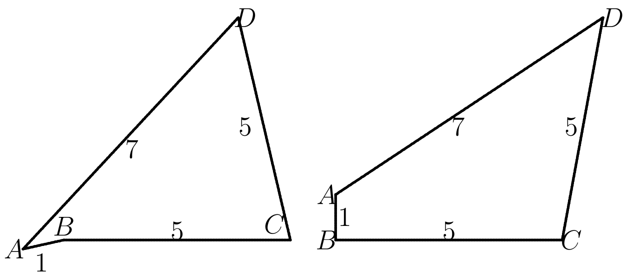
Fällen wir von P das Lot auf AB und nennen den Fußpunkt M, so ist das Dreieck AMP mit dem selben Argument wie vorhin ähnlich zum Dreieck DEC. Die Länge von MP ist also $(\frac{2}{\sqrt{5}}/\frac{\sqrt{5}}{2})x = \frac{4}{5}x$, und nach Pythagoras ist $AM = \frac{2}{5}x$. Daher ist $BM = \frac{3}{5}x$. Wieder Pythagoras sagt uns dann

$$BP = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2}x = x = AB.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Die Abbildung zeigt zwei Vierecke $ABCD$ mit Seitenlängen $|AB| = 1$, $|BC| = 5$, $|CD| = 5$ und $|DA| = 7$.



Wie groß können die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und BCD höchstens werden, wenn die Kantenlängen so sind wie angegeben?

Wie groß ist der Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks $ABCD$ mit diesen Kantenlängen (in dieser Reihenfolge) maximal?

Konstruieren Sie ein solches Viereck mit maximalem Flächeninhalt und begründen Sie Ihren Vorschlag.

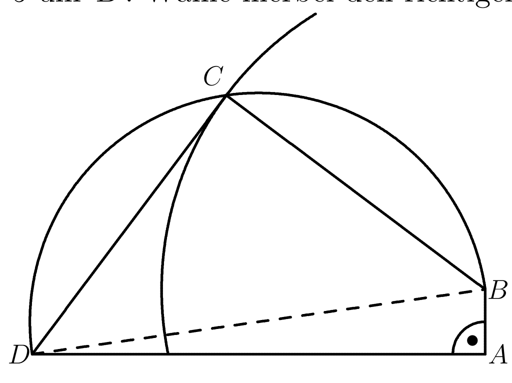
Lösung

Bei zwei gegebenen Seitenlängen wird der Flächeninhalt eines Dreiecks maximal, wenn diese Seiten orthogonal sind.

Der Flächeninhalt von ABC ist also höchstens $\frac{5}{2}$, der von BCD höchstens $\frac{25}{2}$.

Wenn das Dreieck BCD maximalen Flächeninhalt hat, dann ist seine Hypotenuse nach Pythagoras genau $\sqrt{50}$. Das ist aber auch die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit Seitenlängen 1 und 7, das heißt: Der Flächeninhalt von $ABCD$ wird tatsächlich dann maximal, wenn bei A und bei C rechte Winkel vorliegen. Er beträgt dann $\frac{25}{2} + \frac{7}{2} = 16$.

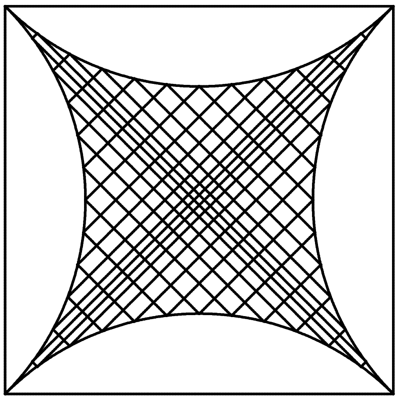
Konstruktion: Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck DAB mit Kathetenlängen 1 und 7 (rechter Winkel bei A), schlage den Thaleskreis über der Hypotenuse und schneide ihn mit dem Kreis von Radius 5 um B. Wähle hierbei den richtigen Schnittpunkt.



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

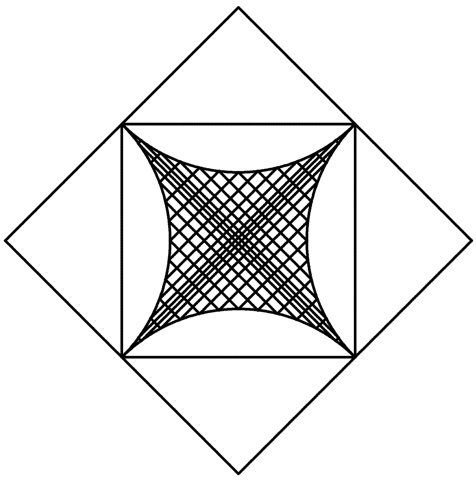
In einem Quadrat der Seitenlänge 1 ist ein Netz eingespannt, das von vier Kreisbögen begrenzt wird, die durch die Ecken des Quadrates gehen und sich dort berühren. Die Diagonalen des Quadrates seien Symmetrieachsen des Netzes.



Berechnen Sie die Fläche des Netzes.

Lösung

Wir ergänzen das Bild durch ein größeres Quadrat, das die Ecken des kleinen als Seitenmittelpunkte hat.



Das größere Quadrat hat Seitenlänge $\sqrt{2}$, und das Netz entsteht aus ihm durch Entfernen von 4 Viertelkreisen mit Radius $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Es hat demnach Fläche

$$\sqrt{2}^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \cdot (1 - \frac{\pi}{4}).$$