Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Gegeben sei die Folge $a_1 = 3,\ a_2 = 5,$ die für $n \geq 3$ durch

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$$

fortgesetzt wird.

Berechnen Sie a_{2014}.

Lösung

Wir setzen die Folge fort:

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_n =$	3	5	2	-3	-5	-2	3	5	2

Man sieht, dass die Folge periodisch mit Periode 6 ist: $a_7 = a_1,\ a_8 = a_2,\ \ldots$

Wegen $2014 = 2010 + 4 = 6 \cdot 335 + 4$ gilt

$$a_{2014} = a_4 = -3.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

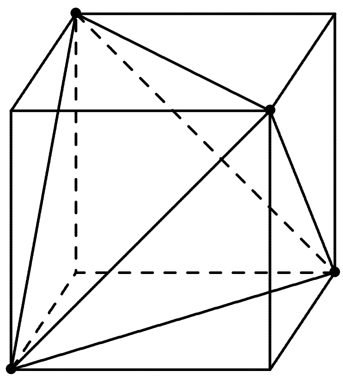
Skizzieren Sie einen Würfel.

Markieren Sie 4 Ecken des Würfels, von denen keine zwei durch eine Kante verbunden sind.

Verbinden Sie je zwei dieser markierten Ecken durch eine Strecke. Wie nennt man den entstehenden Körper?

Berechnen Sie die Oberfläche dieses Körpers, wenn der Würfel Kantenlänge 1 hat.

Lösung



Die entstehende Figur heißt Tetraeder.

Sie hat vier Flächen, von denen jede ein regelmäßiges Dreieck mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ ist.

Ein solches Dreieck hat Flächeninhalt

$$(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Oberfläche des Tetraeders ist daher

$$2\sqrt{3}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Im Koordinatensystem sei der Punkt $F(0 \mid 1)$ gegeben.

Wo liegen alle Punkte, die von F und der x-Achse den gleichen Abstand haben?

Lösung

Der Abstand des Punktes $P(x \mid y)$ von der x-Achse ist $|y|$, der Abstand von F ist $\sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.

Die gesuchten Punkte sind also genau die, für die

$$y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

gilt, also

$$y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1.$$

Das sind also genau diejenigen Punkte, die auf der Parabel liegen, welche durch die Gleichung

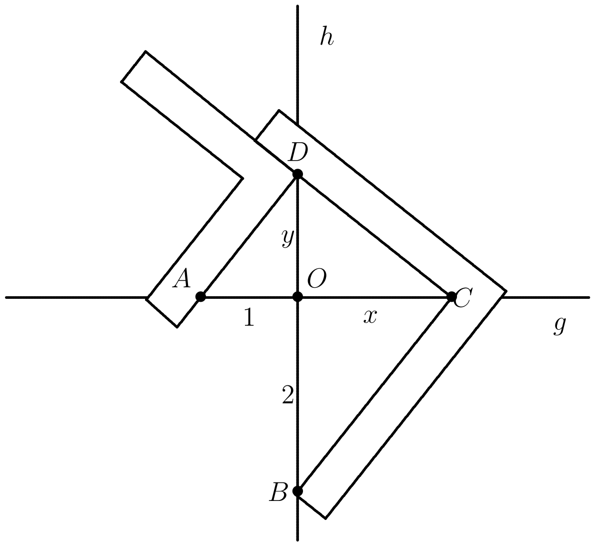
$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

beschrieben wird.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Gegeben sind zwei orthogonale Geraden g und h, die sich im Punkt O schneiden. Weiter seien R_1 und R_2 zwei Rechtwinkelhaken, die so in g und h eingepasst sind, dass $|OA| = 1$ und $|OB| = 2$ gilt.



Berechnen Sie die Abstände von C bzw. D zu O.

Lösung

Wir nennen die Abstände – wie im Bild bezeichnet – x und y.

Da wir zum Glück Rechtwinkelhaken benutzen, sind die Dreiecke AOD, OCD, OBC alle zueinander ähnlich.

Es folgt

$$2 : x = x : y = y : 1,$$

und damit

$$x^2 = 2y, y^2 = x,$$

was

$$y^4 = 2y$$

nach sich zieht.

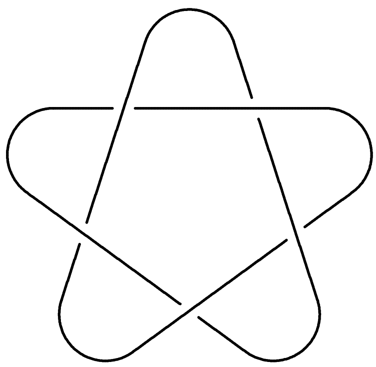
Alles in Allem folgt

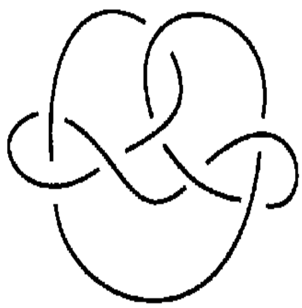
$$y = \sqrt[3]{2},\ x = \sqrt[3]{4}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

In den beiden Knotenbildern soll jeder Teilbogen derart mit einer der Farben rot, gelb oder blau eingefärbt werden, dass an jeder Kreuzung entweder alle drei Bögen die gleiche Farbe haben oder alle drei Farben vorkommen. An mindestens einer Kreuzung soll der zweite Fall eintreten.





Entscheiden Sie für beide Knoten, ob das möglich ist, und nehmen Sie in diesem Fall solch eine Färbung vor.

Lösung

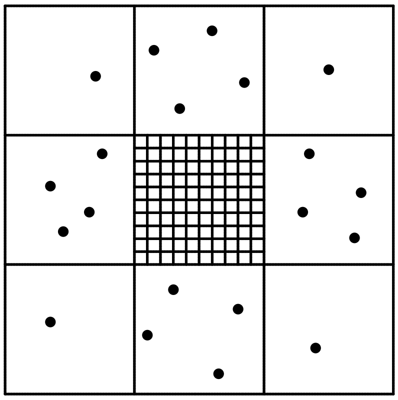
Der erste Knoten lässt sich nicht einfärben.

Der zweite schon: Die „Ohren“ haben eine Farbe, Nase und Kinn die nächste, und die übrigen 4 Teilbögen die dritte.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

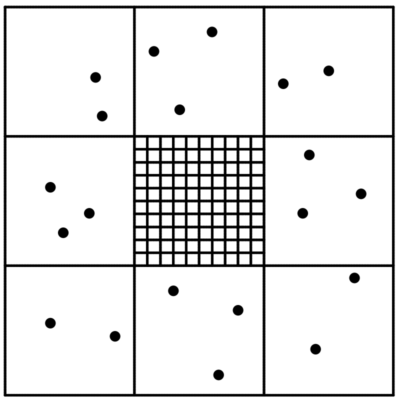
In der abgebildeten Zeichnung liegen in jeder Zeile bzw. jeder Spalte, die aus drei Quadraten besteht, jeweils sechs Steine.



Wie können Sie mit möglichst wenig Zügen die Steine so umlegen, dass in jeder der erlaubten Zeilen oder Spalten genau sieben Steine liegen?

Lösung

Wir schieben von jedem der mittleren Felder einen der vier Steine im Uhrzeigersinn ins nächste Eckfeld weiter:



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Sei
$$f(x) = \frac{2x}{3x+4}.$$
Wie muss $g(x)$ gewählt werden, damit
$$f(g(x)) = x$$
gilt?

Lösung

Wir wollen
$$\frac{2g(x)}{3g(x)+4} = x.$$
Multipliziere beide Seiten mit $3g(x) + 4$:
$$2g(x) = 3xg(x) + 4x.$$
Bringe den ersten Summanden rechts auf die linke Seite und klammere $g(x)$ aus:
$$(2 - 3x)g(x) = 4x.$$
Das führt auf
$$g(x) = \frac{4x}{2-3x}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x gilt die Gleichung

$$\sqrt{x+10} + \sqrt[4]{x+10} = 12?$$

Lösung

Wir setzen $y = \sqrt[4]{x+10}$. Für y muss also

$$y^2 + y = 12$$

erfüllt sein, was nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen auf

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2}$$

führt, also

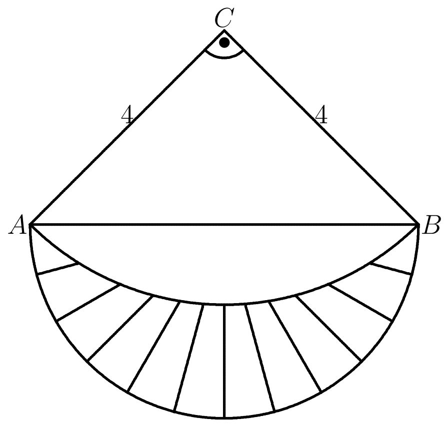
$$y = 3 \text{ oder } -4.$$

Da $y = \sqrt[4]{x+10}$ nicht negativ ist, bleibt nur $y = 3$ und damit $x = 3^4 - 10 = 71$ übrig.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

In der abgebildeten Figur ist $|AC| = |BC| = 4$ und der Winkel bei C ist ein rechter Winkel.



Der markierte Sichelmond wird begrenzt durch den Viertelkreis um C durch A und B sowie den Halbkreis über dem Durchmesser AB.

Wie groß ist sein Flächeninhalt?

Lösung

Der Abstand zwischen A und B ist $4\sqrt{2}$, der Halbkreis hat also Fläche

$$\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\pi = 4\pi.$$

Der Viertelkreis hat Radius 4 und damit Fläche

$$\frac{1}{4}4^2\pi = 4\pi.$$

Allerdings nehmen wir das Dreieck ABC vom Viertelkreis weg; es hat Fläche 8.

Da Viertelkreis und Halbkreis dieselbe Fläche haben, ist demnach die Fläche des Möndchens genau 8.