Tag der Mathematik 2015

Einzelwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	E 1	E 2	E 3	E 4	Summe
Mögliche Punktzahl	8	8	8	8	32
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

In der Keramikfabrik im westfälischen Örtchen Stocherstick werden rechteckige Fliesen verschiedener Farben hergestellt. Proportion und Farbe werden hierbei zufällig kombiniert.

Nach einer kürzlich erstellten Studie empfinden die Kunden die roten Fliesen, deren Kantenlängen im Verhältnis des goldenen Schnittes stehen, als besonders schön.

Durchschnittlich sind 5% der Fliesen nach diesem Kriterium besonders schön, während 20% der Fliesen zwar rot sind, aber nicht besonders schön.

Welcher Anteil der Fliesen ist rot, und welcher Anteil hat Kantenlängen, die im Verhältnis des goldenen Schnittes zueinander stehen?

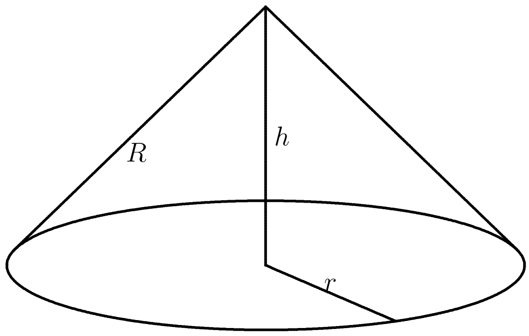
Lösung

Der Anteil aller roten Fliesen ist 25%, denn hierzu gehören die besonders schönen und alle anderen roten Fliesen.

Wegen der Unabhängigkeit von Form und Farbe sind daher auch 25% aller Fliesen mit dem goldenen Schnitt als Seitenverhältnis rot. Die besonders schönen machen also auch ein Viertel der Fliesen mit den bevorzugten Proportionen aus, und das zeigt, dass insgesamt 20% der Fliesen dieses Seitenverhältnis besitzen.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)



Ein kreisförmiges Papier wird längs eines Radius R aufgeschnitten. Es lassen sich dann daraus Kegelmäntel mit unterschiedlichen Grundflächen und Höhen durch „Zusammenziehen“ des berandenden Kreises bilden. Seien V das Volumen und h die Höhe des Kegels sowie r der Radius seiner Grundfläche.

a) Bestimmen Sie das Volumen V in Abhängigkeit von h.

b) Wie muss h gewählt werden, damit V maximal wird? Bestimmen Sie in diesem Fall r/h.

Lösung

a) Nach Pythagoras gilt $r^2 + h^2 = R^2$.

Das Volumen des Kegels ist

$$V = V(h) = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{\pi}{3}(R^2 h - h^3).$$

b) Für $h = 0$ bzw. $h = R$ ist $V = 0$.

Wir betrachten die Ableitung $V'(h) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3h^2)$ und sehen, dass diese 0 wird, wenn $h = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}R$.

Die zweite Ableitung ist für positives h negativ, und daher liegt ein lokales Maximum vor. Dies ist das einzige Maximum für $h \in [0, R]$.

Es gilt an diesem Punkt:

$$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt{R^2 - R^2/3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}R} = \sqrt{2}.$$

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Wie viele Quadratzahlen lassen sich als Produkt

$$(t-10)\cdot(t+10)$$

schreiben, wobei t eine natürliche Zahl ist?

Hinweis: 0 selbst ist auch eine Quadratzahl.

Lösung

Die Quadratzahl sei a^2. Dann haben wir die Gleichung

$$a^2 = (t-10)(t+10) = t^2 - 100,$$

also gilt

$$100 = t^2 - a^2 = (t-a)(t+a).$$

Es müssen also $t-a$ und $t+a$ zueinander komplementäre Teiler von 100 sein. Noch dazu haben sie die gleiche Parität. Da einer der Faktoren gerade sein muss – 100 ist das ja auch –, müssen beide gerade sein.

Wir haben folgende Möglichkeiten, 100 als Produkt zweier gerader Faktoren zu zerlegen:

$$100 = 2\cdot 50 = 10\cdot 10.$$

Die erste Zerlegung führt auf $t-a=2, t+a=50,$ was $t=26$ und $a=24$ nach sich zieht.

Tatsächlich:

$$24^2 = 576 = 676 - 100 = 26^2 - 100.$$

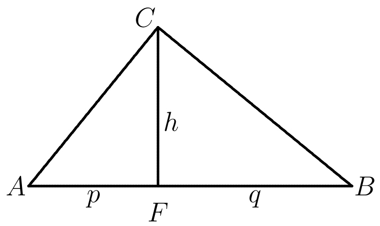
Die zweite Zerlegung führt auf $a=0,$ was zum Glück explizit erlaubt war.

Also gibt es zwei solcher Quadratzahlen.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)

a) Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten p und q und Höhe h.



Begründen Sie, weshalb hier $p/h = h/q$ gilt.

b) Nun sei ein Rechteck mit Kantenlängen p und q gegeben.

Beschreiben Sie, wie sich daraus nur unter Zuhilfenahme von Lineal und Zirkel ein Quadrat konstruieren lässt, das zu dem gegebenen Rechteck flächengleich ist.

Lösung

a) Aufgrund des rechten Winkels bei C sind die Dreiecke AFC und CFB ähnlich, und ihre Kathetenverhältnisse stimmen überein. Die Katheten sind jedoch gerade p und h sowie h und q, und es folgt die Behauptung.

b) Gesucht ist insbesondere die Kantenlänge h, für die $h^2 = pq$ gilt.

Laut Teilaufgabe a) ist dies die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenusenabschnitten p und q. Die Konstruktion geht zum Beispiel so, wobei wir zweimal den rechten Winkel des Rechtecks benutzen, um uns die Konstruktion eines rechten Winkels zu ersparen, die auch mit Zirkel und Lineal möglich wäre:

Verlängere die Seite p und trage auf der Verlängerung die Strecke q ab. Halbiere die so entstandene Strecke der Länge $p + q$ und schlage über ihr den Thaleskreis. Die Verbindungsstrecke seines Schnittpunkts mit der Verlängerung der zweiten Seite des Rechtecks mit dem rechten unteren Eck des Rechtecks ist eine Kante des gesuchten Quadrates. Mehrfaches Abtragen der Länge der Quadratseite liefert uns das gesuchte Quadrat.