Tag der Mathematik 2015

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ rationaler Zahlen wird nach folgender Vorschrift gebildet:

$$\begin{aligned} a_0 &= 10, \\ a_{n+1} &= a_n + 2, \text{ falls } n \text{ gerade}, \\ a_{n+1} &= \tfrac{3}{a_n}, \text{ falls } n \text{ ungerade}. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie $a_0, \ldots, a_{10}$.

b) Bestimmen Sie die Differenz von Zähler und Nenner von a_{10000}, wenn dieser Bruch in gekürzter Form vorliegt.

   Begründen Sie (wie immer) Ihr Ergebnis.

Lösung

Die Zahlenfolge beginnt mit

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	10	12	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{29}{10}$	$\frac{30}{29}$	$\frac{88}{29}$	$\frac{87}{88}$

Man sieht, dass für gerades $n \geq 4$ Zähler und Nenner sich nur um ± 1 unterscheiden. Das wird nun verifiziert:

Sei $a_{2k} = \frac{x+1}{x}$. Dann gilt

$$a_{2k+2} = \frac{3}{a_{2k+1}} = \frac{3}{a_{2k} + 2} = \frac{3x}{3x+1}.$$

Es folgt

$$a_{2k+4} = \frac{3}{a_{2k+2} + 2} = \frac{3(3x+1)}{3x + 2(3x+1)} = \frac{9x+3}{9x+2},$$

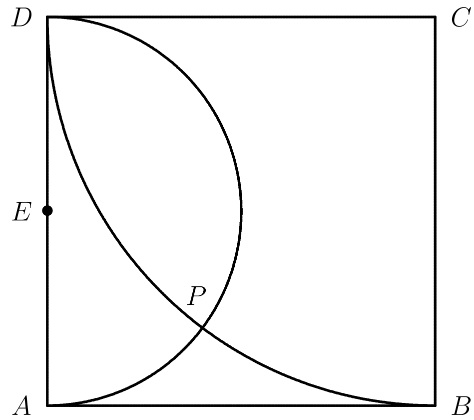
also ist von a_4 beginnend alle vier Schritte der Zähler 1 größer als der Nenner.

Da 10000 durch 4 teilbar ist, gilt auch für a_{10000}: Zähler minus Nenner = 1.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Ein Quadrat $ABCD$ hat im x-y-Koordinatensystem die Ecken
$A(0 \mid 0)$, $B(2 \mid 0)$, $C(2 \mid 2)$ und $D(0 \mid 2)$.
Sei $P(a \mid b)$ der von D verschiedene Schnittpunkt der Kreise durch D mit Mittelpunkten in C bzw. $E(0 \mid 1)$.



Zeigen Sie, dass das Verhältnis der Streckenlängen PB und PA genau $\sqrt{2}$ beträgt.

Lösung

Da P auf dem Kreis mit Radius 1 um E liegt, gilt

$$a^2 + (1-b)^2 = 1.$$

Daher gilt $AP^2 = a^2 + b^2 = 2b$.

Analog liegt P auf dem Kreis mit Radius 2 um C, was

$$(2-a)^2 + (2-b)^2 = 4$$

nach sich zieht.

Das zeigt $BP^2 = (2-a)^2 + b^2 = 4b$, und da b nicht 0 ist, folgt

$$BP : AB = \sqrt{2}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Die Klasse 10 hat zum Schulfest ein Glücksrad gebaut, um die Klassenkasse aufzufüllen. Die darauf zu erreichenden Zahlen 1 bis 5 sind alle gleich wahrscheinlich.

Der Spieler zahlt 1 Euro Einsatz und darf dafür das Rad drei Mal drehen. Anschließend erhält er für jede 1 einen Euro.

a) Welchen Gewinn (Einsatz minus Auszahlung) darf die Klasse pro Spiel erwarten?

b) Für drei Einsen soll eine Sonderausschüttung erfolgen, die das Spiel fair macht, der erwartete Gewinn also 0 ist.

Wie hoch muss diese sein?

Lösung

a) Die Wahrscheinlichkeit für keine 1 ist $(4/5)^3$. Die für eine Eins ist $3 \cdot 4^2/5^3$, die für 2 Einsen ist $3 \cdot 4/5^3$, und die für drei Einsen ist $1/5^3$.

Der erwartete Gewinn ist also (Rechnung in Euro)

$$1 - \frac{48}{125} - \frac{24}{125} - \frac{3}{125} = 50/125 = 0,4.$$

Das sind 40 Cent.

b) Um die Fairheit des Spieles mit der genannten Maßnahme zu erreichen, müsste bei 3 Einsen ein Betrag von S bezahlt werden, wobei

$$1 - \frac{48}{125} - \frac{24}{125} - \frac{S}{125} = 0.$$

Es folgt

$$S = 125 - 48 - 24 = 53.$$

Es müssten also zusätzlich zu den 3 regulären Euro noch 50 Euro als Sonderausschüttung gezahlt werden.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Im x-y-Koordinatensystem sei $P(a \mid a^2), a > 0$, ein Punkt auf der Parabel, die durch $y = x^2$ gegeben ist.

Die Tangente an dieser Parabel im Punkt P schneide die x-Achse in $Q(q \mid 0)$.

Die Fläche zwischen der Parabel, der x-Achse und der Tangente wird durch die Gerade mit der Gleichung $x = q$ in zwei Teilflächen A_1 und A_2 unterteilt.

Zeigen Sie, dass A_1 und A_2 gleichen Flächeninhalt haben.

Lösung

Die Steigung der Tangente in P ist $2a$. Es folgt

$$a^2 = 2a \cdot (a - q),$$

also

$$q = a/2.$$

Der Flächeninhalt von A_1 ist daher

$$\int_0^{a/2} x^2 \mathrm{d}x = x^3/3|_0^{a/2} = \frac{a^3}{24}.$$

Der Inhalt von A_2 ist

$$\int_{a/2}^{a} (x^2 - 2a(x - \frac{a}{2}))\mathrm{d}x = \int_{a/2}^{a} (x-a)^2 \mathrm{d}x = \int_{-a/2}^{0} x^2 \mathrm{d}x = \int_0^{a/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{a^3}{24}.$$