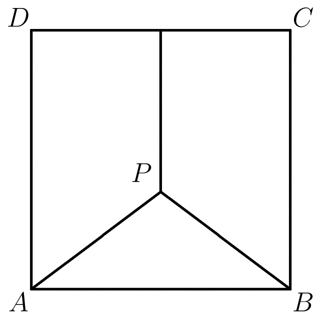
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Wir betrachten ein Quadrat $ABCD$ mit Kantenlänge 16 . Darin gibt es einen Punkt P, der von A, B und dem Mittelpunkt der Seite CD den gleichen Abstand hat.

Skizzieren Sie die Situation und berechnen Sie diesen Abstand.

Lösung



Der Abstand heiße x. Dann gilt:

$$x^2 = 8^2 + (16 - x)^2 = 64 + 256 - 32x + x^2,$$

also

$$32x = 320.$$

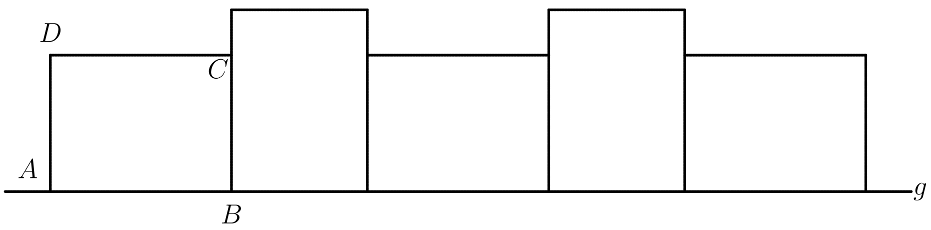
Der Abstand ist demnach 10.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

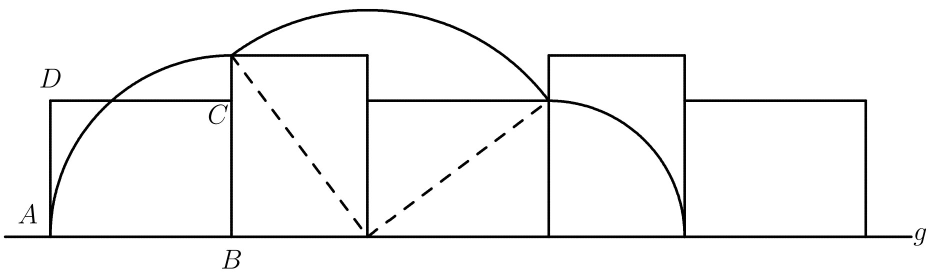
Ein Rechteck $ABCD$ mit Kantenlängen $a = 4$ und $b = 3$ liegt mit der langen Seite AB auf einer Geraden g.

Es wird dann so lange auf g abgerollt, bis AB wieder auf g zu liegen kommt.



Wie lang ist der Weg, den A beim Abrollen zurücklegt?

Lösung



Bei jedem Rollen legt A einen Viertelkreis zurück, dessen Radius jedoch variiert: erst 4, dann 5, dann 3, dann 0.

Die gesamte Wegstrecke beträgt

$$\frac{\pi}{2} \cdot (4 + 5 + 3) = 6\pi.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Opa Alfred sagte an seinem Geburtstag: „Heute bin ich in einem Zahlensystem (100) und in einem anderen (1000) Jahre alt geworden.“

Welches Alter hatte er? Drücken Sie das Ergebnis bitte im Zehnersystem aus.

Lösung

Opas Information besagt, dass sein Alter sowohl eine Quadratzahl als auch eine dritte Potenz ist. Daher ist es eine sechste Potenz.

Die sechsten Potenzen sind

$$0^6 = 0,\ 1^6 = 1,\ 2^6 = 64,\ 3^6 = 729, \dots$$

Da Opa sicher nicht jünger ist als 10 Jahre, aber auch kein biblisches Alter vorliegen dürfte, wird er wohl 64 sein.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Finden Sie zehn aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine eine Primzahl ist.

Lösung

Eine Möglichkeit, solche Zahlen zu finden, ist: Multipliziere die Primzahlen zwischen 2 und 11 und zähle zum Produkt 2 dazu. Diese Zahl ist

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 2 = 2312.$$

Dann sind die Zahlen $2312,\ 2313, \ldots, 2321$ alle von der Gestalt

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + a,$$

wobei a zwischen 2 und 11 liegt, also eine der Zahlen $2, 3, 5, 7, 11$ als Primteiler hat. Daher ist jede der Zahlen zwischen 2312 und 2321 durch eine der Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 teilbar, also keine Primzahl.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Verbinde die fünf auf dem ausgeteilten Styroporring markierten Punkte so durch Linien, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Jeder markierte Punkt ist mit jedem anderen markierten Punkt verbunden.
- Die Linien schneiden sich nicht.
- Die Oberfläche des Ringes wird durch die Linien in Vierecke unterteilt.

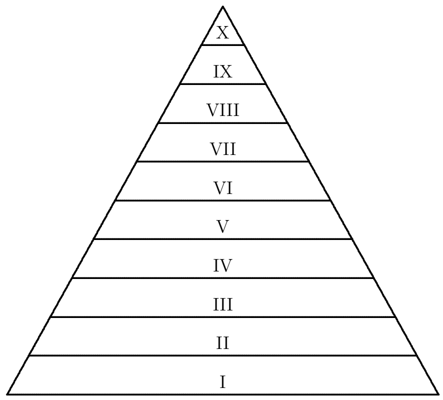
Lösung

Liegt im Hörsaal aus.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Eine Zielscheibe in Form eines gleichseitigen Dreiecks ist durch 9 parallele Linien in 10 gleichbreite Sektoren unterteilt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Bereiche X, VIII und IV getroffen werden. Nehmen Sie dabei an, dass die Zielscheibe immer und jeder Punkt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit getroffen wird.



Lösung

Nach Voraussetzung ist die Wahrscheinlichkeit gleich dem Anteil des Sektors am Flächeninhalt des Dreiecks.

Der kleinste Sektor X ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Kantenlänge ein Zehntel derer der Zielscheibe ist. Sein Flächeninhalt ist daher 1% der Gesamtfläche, also ist das auch die Trefferwahrscheinlichkeit.

Die drei kleinsten Sektoren haben gemeinsam $(\frac{3}{10})^2$ des Flächeninhaltes, die zwei kleinsten entsprechend $(\frac{2}{10})^2$, also ist die Wahrscheinlichkeit, den Sektor VIII zu treffen, gerade

$$\frac{9}{100} - \frac{4}{100} = 5\%.$$

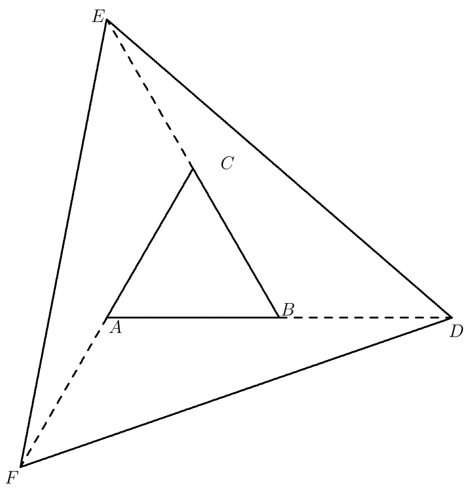
Analog ergibt sich beim viertgrößten Sektor IV eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{49}{100} - \frac{36}{100} = 13\%.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Gegeben sei das gleichseitige Dreieck ABC. Das Dreieck DEF entsteht dadurch, dass A an B, B an C und C an A gespiegelt werden (Punktspiegelung).
In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der Dreiecke DEF und ABC?



Lösung

Das Dreieck AFD hat die Grundseite AF, die genauso lang ist wie CA. Seine Höhe ist jedoch doppelt so groß wie die von ABC, und damit hat es auch den doppelten Flächeninhalt.

Analog haben auch die Dreiecke BDE und CEF den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Insgesamt ergibt sich, dass FDE den siebenfachen Flächeninhalt von ABC besitzt.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Welches ist die letzte Ziffer von 3^{2015}?

Lösung

Die Dreierpotenzen fangen an mit

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561 \ldots$$

und man sieht, dass die Endziffer sich mit Periode 4 wiederholt.

Die Endziffer von 3^{2015} ist demnach dieselbe wie die von 3^3, da $2015 - 3 = 2012$ durch 4 teilbar ist.

Die Endziffer ist 7.

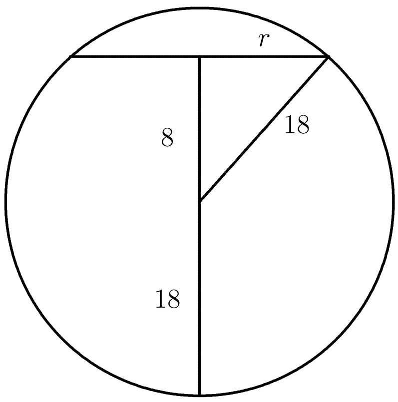
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

In einem kugelförmigen Aquarium mit einem Radius von $18\,\mathrm{cm}$ ist das Wasser an der tiefsten Stelle $26\,\mathrm{cm}$ tief.

Wie groß ist die Wasseroberfläche?

Lösung



Für den Radius r der Wasseroberfläche gilt

$$r^2 = 18^2 - 8^2 = 260.$$

Die Wasseroberfläche ist daher $260\pi\,\mathrm{cm}^2$ groß.