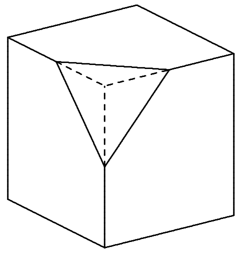
Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Von einem Würfel der Kantenlänge 2 werden alle 8 Ecken so abgeschnitten, dass die Schnittebenen durch die Mittelpunkte benachbarter Kanten gehen. In der Abbildung ist dies für eine Ecke dargestellt.



a) Wie viele Flächen, Kanten und Ecken hat der so entstehende Körper?

b) Berechnen Sie seine Oberfläche und sein Volumen.

Lösung

a) Auf jeder der alten Kanten entsteht in der Mitte eine Ecke, die alten Ecken verschwinden. Also gibt es 12 Ecken.

   Auch die alten Kanten sind nachher verschwunden, dafür entstehen an jeder der alten 8 Ecken drei Kanten. Das macht insgesamt 24 Kanten.

   Die sechs alten Flächen sind zwar kleiner, aber noch da. Hinzu kommt an jeder der alten Ecken eine neue Fläche, also haben wir insgesamt 14 Flächen.

b) Die Oberfläche besteht aus 6 Quadraten der Kantenlänge $\sqrt{2}$ und 8 gleichseitigen Dreiecken der Kantenlänge $\sqrt{2}$, und wir erhalten insgesamt den Flächeninhalt

$$6 \cdot \sqrt{2}^2 + 8 \cdot \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}^2 = 12 + 4\sqrt{3}.$$

   Von dem Ausgangswürfel mit Volumen $2^3 = 8$ werden 8 Tetraeder abgeschnitten, die ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 1 als Grundfläche haben und Höhe 1 besitzen.

   Jedes dieser Tetrader hat Volumen

$$\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1) \cdot 1 = \frac{1}{6},$$

   und damit hat die neue Figur Volumen

$$8 - 8 \cdot \frac{1}{6} = 6\frac{2}{3}.$$

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Setzt man bei einer geeigneten sechsstelligen Zahl die letzte Ziffer an die erste Stelle, so entsteht eine neue Zahl, welche genau fünfmal so groß ist wie die Ausgangszahl.

Bestimmen Sie diese!

Lösung

Wir schreiben die Zahl als $abcdef$. Es gilt also

$$5 \cdot abcdef = fabcde.$$

1. Weg Es gilt $a = 1$ und $f \geq 5$. Außerdem ist $e \in \{0,\ 5\}$. Wenn $e = 0$ gilt, ist f gerade. Anderenfalls ist f ungerade.

Berechne nun für die 5 möglichen Fälle $ef \in \{06,\ 08,\ 55,\ 57,\ 59\}$ sukzessive die weiteren Dezimalziffern:

$$\begin{aligned} ef = 06 \quad &\Rightarrow 5 \cdot ef = 30,\ d = 3 \Rightarrow 5 \cdot def = 1530,\ c = 5 \Rightarrow 5 \cdot cdef = 26530,\ b = 6 \\ &\Rightarrow 5 \cdot bcdef = 326530,\ a = 3. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch zu $a = 1$, also ist $ef = 06$ nicht möglich.

Ähnlich schließt man $ef \in \{08,\ 55,\ 59\}$ aus und es verbleibt noch $ef = 57$:

$$\begin{aligned} ef = 57 \quad &\Rightarrow 5 \cdot ef = 285,\ d = 8 \Rightarrow 5 \cdot def = 4285,\ c = 2 \Rightarrow 5 \cdot cdef = 14285,\ b = 4 \\ &\Rightarrow 5 \cdot bcdef = 214285,\ a = 1 \end{aligned}$$

und tatsächlich finden wir dann

$$5 \cdot 142857 = 714285.$$

2. Weg Aus $5 \cdot abcdef = fabcde$ folgt

$$(50 - 1)abcde = (100000 - 5)f.$$

Die linke Seite ist durch $49 = 50 - 1$ teilbar. Da

$$99995 : 7 = 14285 = 7 \cdot (2040) + 5$$

gilt, muss 7 ein Teiler von f sein und damit $f = 7$ gelten.

Dann steht aber auch schon da, was $abcde$ ist:

$$abcde = 99995 \cdot \frac{7}{49} = 14285.$$

Folglich erhalten wir wieder

$$abcdef = 142857.$$

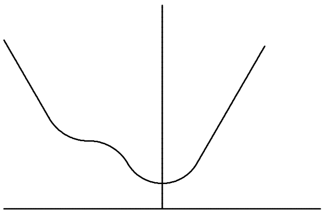
Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

a) Skizzieren Sie den Graphen einer reellwertigen Funktion f, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und differenzierbar ist, keine Nullstelle hat und deren Ableitung genau zwei Nullstellen besitzt.

b) Geben Sie eine Polynomfunktion f mit den Eigenschaften aus Aufgabenteil a) an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a) 

b) Hier muss bzw. kann man Wahlen treffen. Da f keine Nullstelle haben darf, muss f geraden Grad haben. Da die Ableitung 2 Nullstellen hat, ist ihr Grad mindestens 2, da ihr Grad ungerade ist also mindestens 3.

Wir fangen mit einem Polynom vom Grad 3 an, das eine doppelte und eine einfache Nullstelle besitzt, zum Beispiel

$$g(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2.$$

Nun brauchen wir noch ein Polynom, das g als Ableitung hat, aber selbst keine Nullstelle besitzt. Allgemein ist ein Polynom f, das g als Ableitung hat, von der Gestalt

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c,$$

wobei c eine Konstante ist. Bei den Nullstellen 0 und 1 der Ableitung $f' = g$ hat f den Wert

$$f(0) = c \text{ bzw. } f(1) = c - \frac{1}{12}.$$

Daher hat für $c > \frac{1}{12}$ das Polynom f alle gewünschten Eigenschaften.

Konkret wäre also

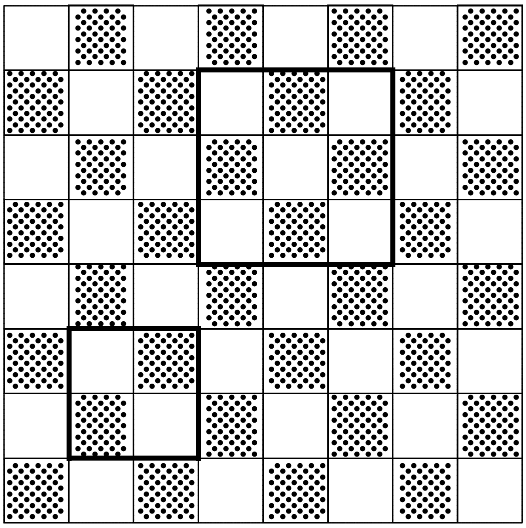
$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 97$$

eine gute Wahl.

Denn: Für $x \to \pm\infty$ geht der Funktionswert $f(x)$ auch gegen unendlich, und das Minimum wird bei 0 oder 1 angenommen (de facto bei 1), wo der Funktionswert nach Wahl von c ebenfalls positiv ist.

Teamnummer	Name und Vorname

Aufgabe E 4 (8 Punkte)



a) Wieviele achsparallele Quadrate kann man auf dem Schachbrett entdecken? Ein 3×3- und ein 2×2-Quadrat sind eingezeichnet.

b) Wie viele der in a) entdeckten Quadrate bleiben übrig, wenn man die beiden weißen Ecken links oben und rechts unten vom Schachbrett entfernt?

Lösung

a) Es gibt $8^2 = 64$ Quadrate der Kantenlänge 1, $7^2 = 49$ Quadrate der Kantenlänge 2, $6^2 = 36$ mit Kantenlänge 3, $5^2 = 25$ mit Kantenlänge 4, $4^2 = 16$ mit Kanenlänge 5, $3^2 = 9$ mit Kantenlänge 6, $2^2 = 4$ mit Kantenlänge 7 und eines mit Kantenlänge 8. Macht zusammen

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 204.$$

b) Hier fallen von den vorher gezählten Quadraten diejenigen weg, die eines der beiden entfernten Quadrate mit belegen würden. Diese sind das 8×8-Quadrat sowie je zwei mit Kantenlängen zwischen 1 und 7.

Also fehlen nun von den vorher 204 genau $1 + 2 \cdot 7 = 15$, es gibt noch 189 Quadrate.