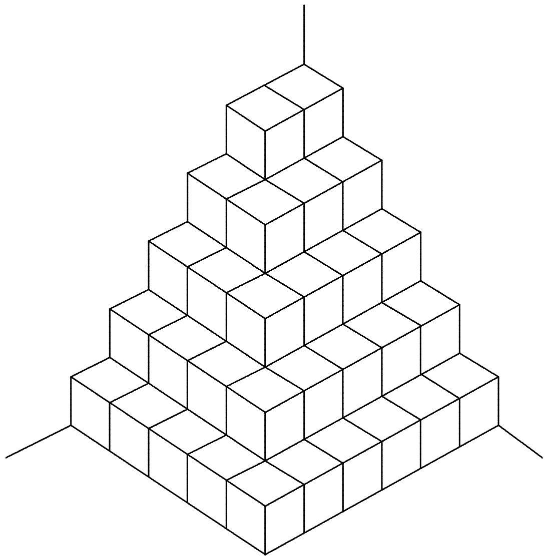
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

In einer Zimmerecke sind mehrere Lagen von Würfeln aufgestapelt. Die Abbildung zeigt diese Würfelpyramide. Nicht alle Würfel sind sichtbar.



a) Aus wie vielen Würfeln besteht die Pyramide?

b) Die sichtbaren Flächen werden nun rot lackiert. Wie viele Würfel haben dann 0, 1, 2 bzw. 3 rote Flächen?

c) Ein Würfel wird zufällig ausgewählt und dann geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass anschließend eine rote Fläche oben liegt?

Lösung

a) Es sind $5 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 70$ Würfel.

b) Zu sehen sind insgesamt $10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$ Würfel.

Daher haben 40 Würfel keine rote Fläche. Kein Würfel hat genau eine rote Fläche. Genau 5 Würfel haben drei rote Flächen, und es müssen daher 25 mit genau zwei roten Flächen sein.

c) Von den 420 Würfelflächen insgesamt sind $5 \cdot 3 + 25 \cdot 2 = 65$ rot. Die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem beschriebenen Prozess eine rote Seite oben liegt, ist daher $\frac{65}{420} = \frac{13}{84}$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Im Raum seien die Punkte $P(7|12|10)$, $Q(8|8|1)$ und $R(11|3|9)$ gegeben.

a) Wie viele Würfel gibt es, die P, Q und R als drei Ecken haben?

b) Wie groß ist die Oberfläche solch eines Würfels?

Lösung

a) Der Abstand zwischen P und Q ist $\sqrt{1^2 + 4^2 + 9^2} = \sqrt{98} = 7 \cdot \sqrt{2}$.

Das ist auch der Abstand zwischen P und R sowie zwischen Q und R. Alle Abstände sind demnach gleich.

Wenn die drei Punkte Ecken eines Würfels sind, müssen daher die Verbindungsstrecken alle entweder Kanten, Flächendiagonalen oder Raumdiagonalen sein. Da drei Kanten eines Würfels niemals ein gleichseitiges Dreieck begrenzen und dies auch für drei Raumdiagonalen gilt, müssen die Verbindungsstrecken Flächendiagonalen sein.

Es gibt genau zwei Würfel, für die dies der Fall ist.

b) Da die Flächendiagonale nach der Rechnung aus dem a)-Teil Länge $7 \cdot \sqrt{2}$ hat, ist die Kantenlänge genau 7. Die Oberfläche des Würfels ist daher

$$6 \cdot 7^2 = 294.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Im (x, y)-Koordinatensystem werden 5 beliebige Punkte mit ganzzahligen Koordinaten ausgewählt.

Begründen Sie, wieso es unter den 10 Verbindungsstrecken mindestens eine gibt, deren Mittelpunkt ebenfalls ganzzahlige Koordinaten hat.

Lösung

Der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $P(a|b)$ und $Q(c|d)$ ist $M(\frac{a+c}{2}|\frac{b+d}{2})$.

Wenn P und Q ganzzahlige Koordinaten haben, dann hat dieser Mittelpunkt genau dann ganzzahlige Koordinaten, wenn sowohl a und c als auch b und d gleiche Parität haben, also $c - a$ und $d - b$ gerade sind.

Von den fünf Punkten gibt es aber mindestens drei, bei denen die x-Koordinaten gleiche Parität haben, und von diesen drei mindestens zwei, wo auch die y-Koordinaten gleiche Parität haben.

Deren Verbindungsgerade hat dann die gewünschte Eigenschaft.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A_n := 0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2.$$

a) Bestimmen Sie die Werte A_0, A_1, A_2, A_3.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms $f(X) = a + bX + cX^2 + dX^3$, sodass

$$f(n) = A_n \text{ für } n = 0, 1, 2, 3.$$

Tipp: Jede dieser vier Gleichungen liefert eine lineare Gleichung für a, b, c, d.

c) Zeigen Sie für das so definierte Polynom f und beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$:
Wenn $A_n = f(n)$ gilt, dann gilt auch $A_{n+1} = f(n+1)$.

Lösung

a) Es gilt

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = A_1 + 4 = 5, \quad A_3 = A_2 + 9 = 14.$$

b) $f(0) = 0$ liefert die Gleichung $a = 0$. Die drei anderen Werte führen auf

$$\begin{array}{rcrcrcr} b & + & c & + & d & = & 1 \\ 2b & + & 4c & + & 8d & = & 5 \\ 3b & + & 9c & + & 27d & = & 14 \end{array}$$

Zieht man das Doppelte der ersten von der zweiten und das Dreifache der ersten von der dritten Gleichung ab, so entsteht daraus

$$\begin{array}{rcrcrcr} b & + & c & + & d & = & 1 \\ & & 2c & + & 6d & = & 3 \\ & & 6c & + & 24d & = & 11 \end{array}$$

Zieht man nun noch das Dreifache der zweiten Gleichung von der dritten ab, so erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcr} b & + & c & + & d & = & 1 \\ & & 2c & + & 6d & = & 3 \\ & & & & 6d & = & 2 \end{array}$$

Das führt auf $d = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{6}$, also

$$f(X) = \frac{2X^3 + 3X^2 + X}{6}.$$

c) Wenn wir $A_n = f(n)$ voraussetzen, dann ergibt sich für $n+1$:

$$\begin{aligned}
A_{n+1} &= A_n + (n+1)^2 = f(n) + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6} \\
&= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6},
\end{aligned}$$

und für $f(n+1)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= \frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6} \\
&= \frac{2n^3+6n^2+6n+2+3n^2+6n+3+n+1}{6} \\
&= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}.
\end{aligned}$$

Also gilt auch $A_{n+1} = f(n+1)$.