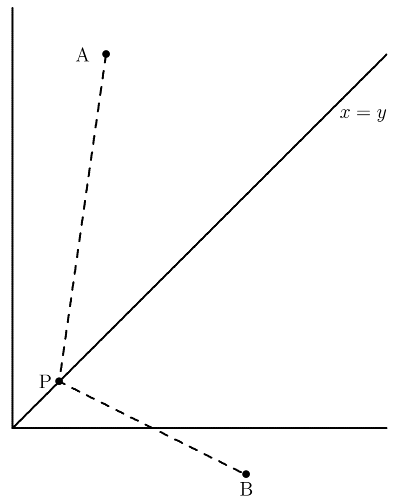
Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Welche Punkte P der durch $x = y$ gegebenen Geraden haben von $A(4|30)$ den doppelten Abstand wie von $B(16|-1)$?



Lösung

Für $P(x|x)$ muss gelten:

$$(4-x)^2 + (30-x)^2 = 4 \cdot ((16-x)^2 + (-1-x)^2),$$

also nach Ausmultiplizieren

$$2x^2 - 68x + 916 = 8x^2 - 120x + 1028$$

oder auch

$$6x^2 - 52x + 112 = 0.$$

Das gilt für

$$x = \frac{52 \pm \sqrt{2704 - 2688}}{12} = 4 \text{ oder } 4\frac{2}{3}.$$

Die zwei gesuchten Punkte sind also $P(4|4)$ und $P(4\frac{2}{3}|4\frac{2}{3})$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Wie viele positive Teiler hat 2016?

Lösung

Es gilt

$$2016 = 32 \cdot 63 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1.$$

Alle Teiler von 2016 haben daher die Primfaktorzerlegung

$$2^a \cdot 3^b \cdot 7^c,\ 0 \leq a \leq 5,\ 0 \leq b \leq 2,\ 0 \leq c \leq 1.$$

Hierfür gibt es

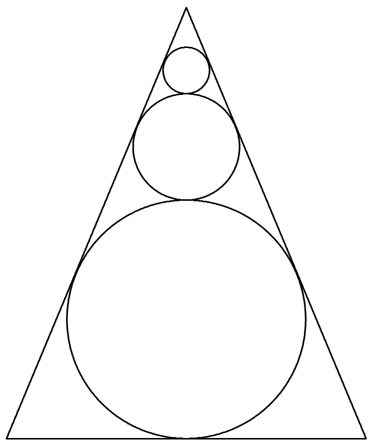
$$(5+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 36$$

Möglichkeiten.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

In einem gleichschenkligen Dreieck mit Schenkellänge 13 und Basislänge 10 wird der Inkreis eingezeichnet. Dann wird ein Kreis eingezeichnet, der sowohl die beiden Schenkel des Dreiecks als auch den vorher eingezeichneten Kreis berührt. Dieses Verfahren wird nun immer wieder wiederholt, sodass unendlich viele Kreise im Dreieck entstehen, von denen die ersten drei im Bild eingezeichnet sind.
Bestimmen Sie die Summe der Umfänge dieser Kreise.



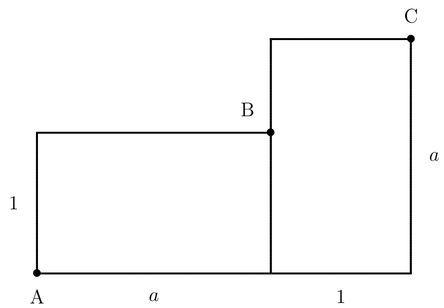
Lösung

Der Umfang eines jeden Kreises ist das π-fache seines Durchmessers. Da sich die Durchmesser aller Kreise offensichtlich zur Höhe des Dreiecks aufsummieren, ist die gesuchte Zahl

$$\pi \cdot \sqrt{169 - 25} = 12\pi.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)



Zwei Rechtecke mit Kantenlängen 1 und a werden wie abgebildet aneinandergelegt.
Wie muss a gewählt werden, damit die eingezeichneten Eckpunkte A, B und C auf einer Geraden liegen?

Lösung

Hier muss gelten:

$$a : 1 = (1 + a) : a.$$

Das bedeutet nach Ausmultiplizieren:

$$a^2 - a - 1 = 0$$

und daher

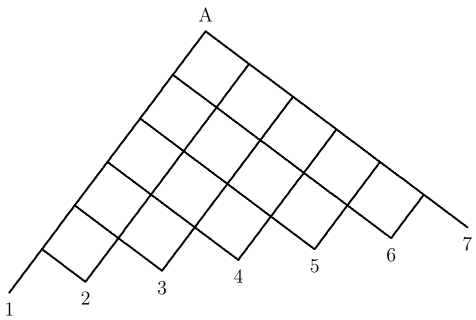
$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(Die negative Lösung $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kommt natürlich nicht in Frage.)

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Auf dieser schiefen Kugelbahn rollt eine Kugel von A abwärts und nimmt dabei bei jeder Kreuzung mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ die steilere linke Variante, mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ die flachere rechte.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt die Kugel am Ende bei Punkt 4 an?



Lösung

In jedem Fall durchläuft die Kugel 6 Kreuzungspunkte, bevor sie unten ankommt.

Um dort bei 4 anzukommen, muss die Kugel sich bei 3 der 6 durchlaufenen Kreuzungen für die rechte Variante entscheiden. Für die Verteilungen dieser Rechtswege, die hier einmal nicht ausgeschlossen sind, gibt es $\binom{6}{3} = 20$ Möglichkeiten.

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit demnach

$$20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{160}{729} \approx 0,219.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Ein Stammbruch ist der Kehrwert einer natürlichen Zahl.

Welche der drei Zahlen $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{11}$ lassen sich als Summe zweier Stammbrüche schreiben?

Schreiben Sie die von Ihnen angegebenen Zahlen als Summe zweier Stammbrüche.

Lösung

Aus

$$\frac{c}{11} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

folgt

$$abc = 11 \cdot (a + b),$$

und daher ist 11 ein Teiler von a (oder von b, aber das läuft auf dieselbe Lösung hinaus). Setzt man $a = 11k$ ein, so folgt nach Kürzen von 11

$$kbc = 11k + b,$$

und daher ist $b = k(bc - 11)$ ein Vielfaches von k. Schreibe kurz $b = kl$. Es folgt

$$klc = 11 + l,$$

also ist l ein Teiler von $11 = (kc - 1)l$ und damit $l = 1$ oder $l = 11$. Für $l = 11$ ergäbe sich $kc = 2$, was nicht geht, da $c \in \{3, 5, 6\}$.

Für $l = 1$ ergibt sich $kc = 12$. Das ist für $c = 3$ oder 6 lösbar, für $c = 5$ nicht.

Wir erhalten also als Lösungen

$$\frac{3}{11} = \frac{1}{4} + \frac{1}{44} \text{ und } \frac{6}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{22}.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Gegeben sind fünf Geraden und zwei Kreise in der Ebene.

a) Wie groß ist die maximal mögliche Anzahl aller Schnittpunkte?

b) Skizzieren Sie eine Konfiguration, für die diese maximal mögliche Anzahl realisiert wird.

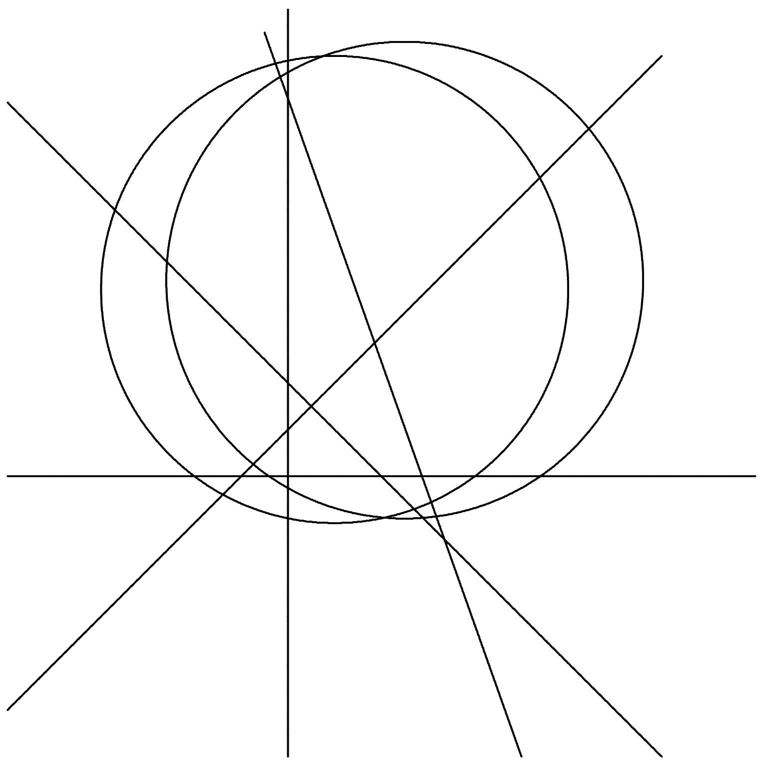
Lösung

a) Je zwei Geraden haben höchstens einen Schnittpunkt, während jede Gerade mit jedem Kreis und auch die beiden Kreise miteinander 2 Schnittpunkte haben können. Das macht insgesamt

$$\binom{5}{2} + 5 \cdot 2 \cdot 2 + 2 = 32$$

Schnittpunkte.

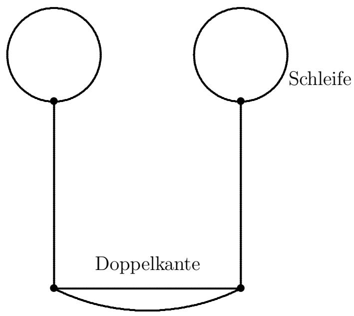
b)



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

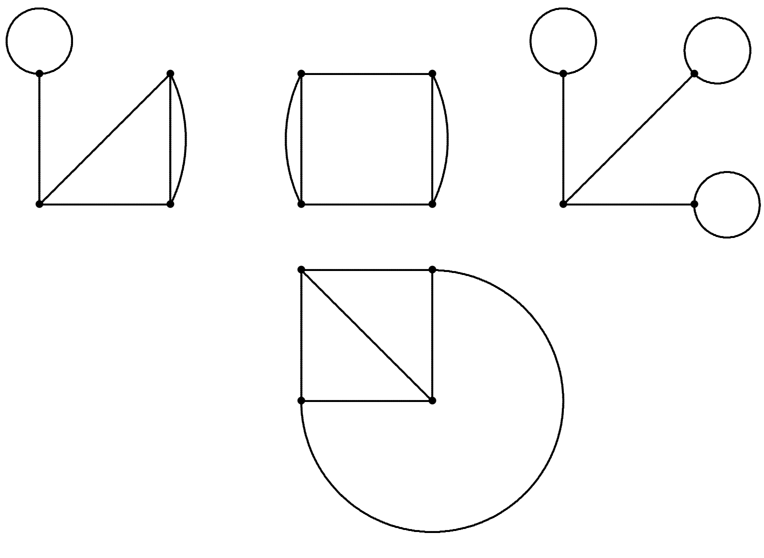
Aufgabe S 8 (4 Punkte)

4 Punkte sollen so durch 6 Linien verbunden werden, dass in jedem Punkt gleich viele Linien enden. Hierbei zählt eine Schleife in ihrem Anfangs- und Endpunkt doppelt. Außerdem soll man sich von jeder Ecke zu jeder anderen mit einem Kantenzug bewegen können. Die nebenstehende Abbildung zeigt eine solche Möglichkeit.



Geben Sie vier weitere Möglichkeiten an, die sich untereinander und von der in der Abbildung dargestellten Möglichkeit in der Zahl der Doppelkanten und/oder der Zahl der Schleifen unterscheiden.

Lösung



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Schreibt man die natürlichen Zahlen hintereinander, so entsteht die Ziffernfolge

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \ldots$$

An der 19ten Stelle etwa steht die Ziffer 4.

Welche Ziffer steht an der 2016ten Stelle?

Lösung

Auf die 9 einstelligen Zahlen folgen 90 zweistellige, sodass die 190te Stelle die 1 von 100 ist.

Wegen

$$(2016 - 189) : 3 = 1827 : 3 = 609$$

ist die 2016te Stelle die Endziffer der Zahl $609 + 99$, also 8.