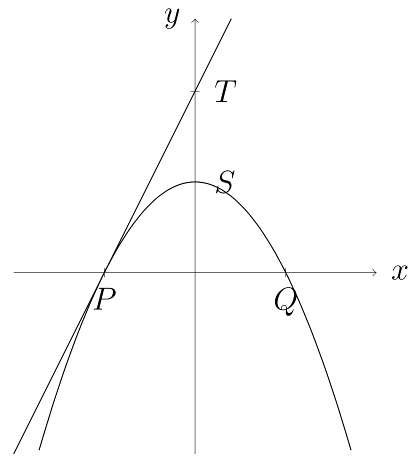
# Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Die Parabel gegeben durch

$$f(x) = -ax^2 + c$$

mit $a > 0$ und $c > 0$ habe den Scheitel $S$ sowie die Nullstellen $P$ und $Q$. Die Tangente in $P$ schneide die $y$-Achse in $T$.

Berechnen Sie das Verhältnis der Längen der Strecken $\overline{OS}$ und $\overline{ST}$.
(Dabei bezeichne $O$ den Koordinatenursprung.)




*Lösung:* $S$ hat die Koordinaten $(0, c)$.

Die Nullstellen von $f$ sind $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$, also hat $P$ die Koordinaten $(-\sqrt{\frac{c}{a}}, 0)$.
Die Tangente in $P$ hat die Steigung $f'(-\sqrt{\frac{c}{a}}) = 2a\sqrt{\frac{c}{a}}$, ihre Gleichung ist also

$$y = 2a\sqrt{\frac{c}{a}} \cdot x + d,$$

mit $T = (0, d)$. Durch Einsetzen der Koordinaten von $P$ ergibt sich

$$d = 0 - 2a\sqrt{\frac{c}{a}}(-\sqrt{\frac{c}{a}}) = 2c.$$

Somit hat $T$ die Koordinaten $(0, 2c)$ und es ist

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{ST}} = \frac{c}{2c - c} = 1.$$

# Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ so, dass die Summe der Kehrwerte der Lösungen der Gleichung

$$u^2 x^2 + (u-3)x + \frac{1}{u+1} = 0$$

maximal wird.

*Lösung:* Für die Lösungen $x_1$ und $x_2$ der Gleichung $x^2 + \frac{u-3}{u^2}x + \frac{1}{u^2(u+1)} = 0$ gilt

$$x_1 + x_2 = -\frac{u-3}{u^2} \qquad \text{und} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{u^2(u+1)},$$

da $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$ ist. Die Summe der Kehrwerte der Lösungen ist also

$$s = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{u-3}{u^2}}{\frac{1}{u^2(u+1)}} = -(u-3)(u+1) = -u^2 + 2u + 3 = 4 - (u-1)^2.$$

Dies wird maximal, wenn $u - 1 = 0$ ist, also für $u = 1$.

Man kann das Maximum der Funktion $s(u) = -u^2 + 2u + 3$ natürlich auch dadurch bestimmen, dass man die Nullstelle der Ableitung $s'(u) = -2u + 2$ bestimmt.

## Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Es seien $n$ eine natürliche Zahl, $x = (1 + \frac{1}{n})^n$ und $y = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Zeigen Sie:

$$y^x = x^y.$$

*Lösung:* Es ist $y = x(1 + \frac{1}{n}) = x + \frac{x}{n}$. Also ist

$$\begin{aligned} y^x &= x^x (1 + \frac{1}{n})^x \quad \text{und} \\ x^y &= x^{x + \frac{x}{n}} = x^x \cdot x^{\frac{x}{n}} = x^x \cdot (x^{\frac{1}{n}})^x. \end{aligned}$$

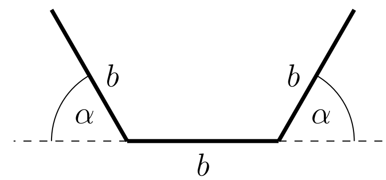
Wegen $x^{\frac{1}{n}} = ((1 + \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}$ folgt daraus

$$x^y = x^x (1 + \frac{1}{n})^x = y^x.$$

# Aufgabe E 4 (8 Punkte)

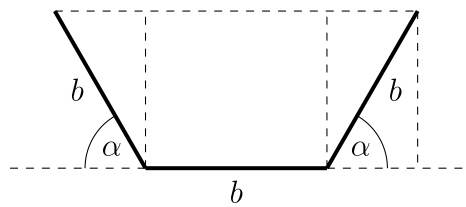
Aus drei gleichen Brettern der Breite $b$ soll nach nebenstehender Skizze eine Dachrinne hergestellt werden.

Für welchen Neigungswinkel $\alpha$ der Seitenbretter ist die Querschnittsfläche am größten?




*Lösung:* Das rechtwinklige Dreieck mit dem Winkel $\alpha$ hat die Seiten $b \cdot \cos\alpha$ (horizontal) und $b \cdot \sin\alpha$ (vertikal). Damit ist die Querschnittsfläche der Rinne

$$F(\alpha) = b \cdot b\sin\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} b\cos\alpha \cdot b\sin\alpha = b^2 \sin\alpha(1+\cos\alpha).$$




Ist $F(\alpha)$ maximal, so muss gelten:

$$F'(\alpha) = b^2(\cos\alpha(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha) = 0.$$

Dies führt auf

$$\cos\alpha(1+\cos\alpha) = \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

und damit auf die quadratische Gleichung

$$\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0$$

mit den beiden Lösungen

$$\cos\alpha = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4} \cdot 3.$$

$\cos\alpha = -1$ führt auf $F(\alpha) = 0$, also ein Minimum.

Somit ist $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, also $\alpha = 60^\circ$, die gesuchte Lösung.