Aufgabe G 1 (9 Punkte)

Eine Urne enthält blaue und rote Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{1}{4}$. Entfernt man eine blaue Kugel, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine blaue Kugel zu ziehen, $\frac{1}{5}$.

Wie viele rote Kugeln sind in der Urne?

Lösung: Sei n die Anzahl aller Kugeln in der Urne und b die Anzahl der blauen Kugeln. Die beiden Angaben über die Wahrscheinlichkeiten bedeuten

$$\frac{b}{n} = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad \frac{b-1}{n-1} = \frac{1}{5}.$$

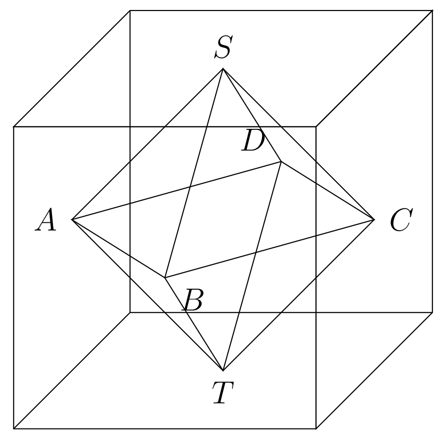
Das bedeutet $4b = n$ und

$$5b - 5 = n - 1 = 4b - 1.$$

Also ist $b = 4$, $n = 16$ und die Anzahl $n - b$ der roten Kugeln ist 12.

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Verbindet man in einem Würfel die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen, so erhält man ein Oktaeder, dessen Ecken wir wie in der Skizze mit A, B, C, D, S und T bezeichnen. Vier der Eckpunkte des Oktaeders haben die Koordinaten



$$A(13, -5, 3), \quad B(11, 3, 1), \quad C(5, 3, 7), \quad S(13, 1, 9).$$

Berechnen Sie

a) die Länge der Würfelkante,

b) die Oberfläche des Oktaeders,

c) die Koordinaten von D und T.

Lösung: a) Die Länge l der Würfelkante ist gleich dem Abstand der Punkte A und C, also

$$l = \sqrt{(13-5)^2 + (-5-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{144} = 12.$$

b) Die Länge s der Oktaederkante ist der Abstand der Punkte A und B, also

$$s = \sqrt{(13-11)^2 + (-5-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Das Oktaeder besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit Kantenlänge s, seine Oberfläche ist also

$$O = 8 \cdot \frac{s^2}{4}\sqrt{3} = 144\sqrt{3}.$$

c) Für den Mittelpunkt M des Oktaeders (und des Würfels) gilt

$$M = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(18, -2, 10) = (9, -1, 5).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} D &= M + M - B = (7, -5, 9) \quad \text{und} \\ T &= M + M - S = (5, -3, 1). \end{aligned}$$

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Für welche a sind die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - ax + 2a$ ganzzahlig?

Lösung 1: Die Nullstellen von f sind $x_{1/2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a(a-8)})$. Sie sind genau dann ganzzahlig, wenn es $n, m \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$\frac{1}{2}(a + \sqrt{a(a-8)}) = n \quad \text{und}$$
$$\frac{1}{2}(a - \sqrt{a(a-8)}) = m$$

Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$a = n + m \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sqrt{a(a-8)} = n - m \in \mathbb{Z}$$

Das geht nur, wenn $a(a-8)$ eine Quadratzahl in $\mathbb{Z}$ ist. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

(i) $a = 0$ oder $a = 8$, also $a(a-8) = 0$ und $x_{1/2} = 0$ oder 4.

(ii) a und $a - 8$ sind beides Quadratzahlen. Dann ist $a = 9$ und $a - 8 = 1$, d.h. $x_{1/2} = 6$ oder 3.

(iii) $-a$ und $-(a-8)$ sind beides Quadratzahlen. Dann ist $a = -1$, $a - 8 = -9$ und $x_{1/2} = 1$ bzw. -2.

(iv) Weder a noch $a - 8$ ist Quadratzahl. Dann muss jeder Primteiler, der in a mit ungerader Vielfachheit vorkommt, auch in $a - 8$ mit ungerader Vielfachheit vorkommen. Eine solche Primzahl teilt sowohl a als auch $a - 8$ und damit auch 8. Die einzige solche Primzahl ist 2. Dieser Fall kann also nur eintreten, wenn $a = 2b^2$ und $a - 8 = 2c^2$ für gewisse ganze Zahlen b und c gilt. Dann wäre aber $2b^2 - 8 = 2c^2$, also $b^2 - c^2 = 4$. Es gibt aber keine Quadratzahlen, deren Differenz 4 ist.

Ganzzahlige Lösungen gibt es also genau in den Fällen (i), (ii) und (iii), d.h. für

$$a = -1, 0, 8, 9.$$

Lösung 2: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ die Nullstellen von $x^2 - ax + 2a$. Dann gilt $(x-n)(x-m) = x^2 - ax + 2a$, also $n + m = a$ und $n \cdot m = 2a$. Damit folgt $2(n+m) - n \cdot m = 0$, also $(m-2) \cdot n = 2m$.

Sei n die betragsmäßig größere der beiden Nullstellen, also $|m| \leq |n|$. Dann gilt:

$$|n| \cdot |m| = |n \cdot m| = 2 \cdot |n + m| \leq 4 \cdot |n|.$$

Es folgt $n = m = 0$ oder $|m| \leq 4$. Mit $(m-2) \cdot n = 2m$ bleiben folgende Möglichkeiten:

$m = 4 \Rightarrow 2n = 8 \Rightarrow (x-4)(x-4) = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow a = 8$.

$m = 3 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow (x-6)(x-3) = x^2 - 9x + 18 \Rightarrow a = 9$.

$m = 2 \Rightarrow 0 = 4$, geht nicht.

$m = 1 \Rightarrow -n = 2 \Rightarrow (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 \Rightarrow a = -1$.

$m = 0 \Rightarrow -2n = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow a = 0$.

$m = -1 \Rightarrow -3n = -2$, geht nicht.

$m = -2 \Rightarrow -4n = -4 \Rightarrow n = 1$, Widerspruch zu $|n| \geq |m|$.

$m = -3 \Rightarrow -5n = -6$, geht nicht.

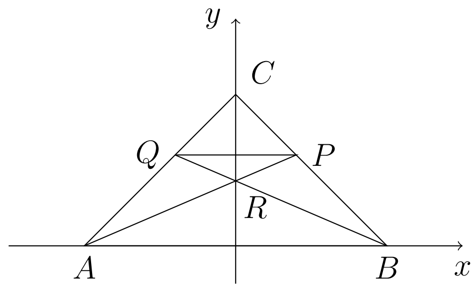
$m = -4 \Rightarrow -6n = -8$, geht nicht.

Damit ist a eine der Zahlen $-1, 0, 8, 9$.

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Im Koordinatensystem sei ein Dreieck ABC mit $A(-1,0)$, $B(1,0)$ und $C(0,1)$ gegeben. Zwei Punkte P auf der Strecke $\overline{BC}$ und Q auf der Strecke $\overline{AC}$ seien so gewählt, dass PQ parallel zu AB ist. Sei R der Schnittpunkt von AP mit BQ.

Wie müssen P und Q gewählt werden, damit das Dreieck PQR maximale Fläche hat?

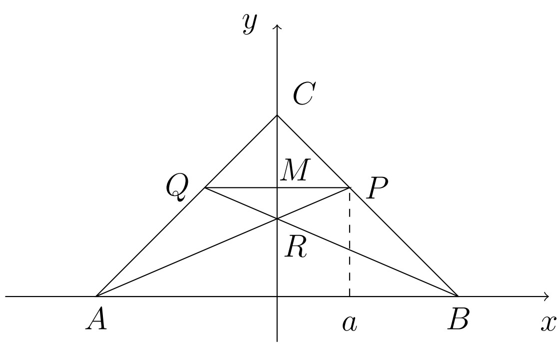


Lösung: Die Gerade durch B und C hat die Gleichung $y = -x + 1$, der Punkt P hat also Koordinaten $(a, 1-a)$ für ein a zwischen 0 und 1; der Punkt Q hat entsprechend die Koordinaten $(-a, 1-a)$.

Die Gerade durch A und P hat die Gleichung

$$\frac{y-0}{x+1} = \frac{1-a}{1+a},$$

also hat R die Koordinaten $(0, \frac{1-a}{1+a})$.



Der Flächeninhalt $F(a)$ des Dreiecks PQR ist doppelt so groß wie der des rechtwinkligen Dreiecks PMR, wobei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ ist.
Die Strecke $\overline{PM}$ hat die Länge a und die Strecke $\overline{MR}$ die Länge $1 - a - \frac{1-a}{1+a} = \frac{a(1-a)}{1+a}$.
Also ist

$$F(a) = \frac{a^2(1-a)}{1+a}.$$

Damit der Flächeninhalt maximal wird, muss $F'(a) = 0$ sein. Es ist

$$F'(a) = \frac{1}{(1+a)^2}((2a-3a^2)(1+a) - a^2(1-a)) = -\frac{2a}{(1+a)^2}(a^2+a-1)$$

Die Nullstellen von $F'(a)$ sind also $a = 0$ und $a = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Für $a = 0$ ist $F(a) = 0$ minimal, und da $a \geq 0$ sein soll, bleibt als Lösung

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$