Aufgabe S 1 (4 Punkte)

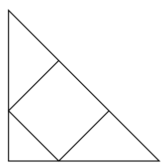
In ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge 2 werden zwei Quadrate so einbeschrieben, dass

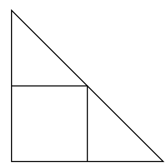
a) beim ersten Quadrat eine Seite auf der Hypotenuse liegt und

b) beim zweiten Quadrat zwei Seiten auf den Katheten liegen.

Welches Quadrat hat die größere Fläche? Berechnen Sie die Kantenlänge des anderen Quadrates.

Lösung:

a) 

b) 

In der Situation a) besteht das ursprüngliche Dreieck aus dem einbeschriebenen Quadrat und drei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken. Bei zwei dieser Dreiecke ist die Kathetenlänge gleich der Quadratseite. Diese beiden Dreiecke haben zusammen also die gleiche Fläche wie das Quadrat. Insbesondere ist die Quadratfläche kleiner als die Hälfte der Dreiecksfläche.

Im Fall b) dagegen besteht das große Dreieck aus dem Quadrat und zwei gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken, deren Kathetenlänge gleich der Quadratseite ist. Also ist die Quadratfläche gleich der halben Dreiecksfläche und damit größer als in a).

In Zahlen:
Bei a) ist die Quadratseite s ein Drittel der Dreieckshypotenuse, also $s = \frac{1}{3}\sqrt{8}$, die Quadratfläche also $\frac{8}{9}$.
Bei b) ist die Quadratseite halb so lang wie eine Kathete des Dreiecks, also 1, die Quadratfläche ist also 1.

Zusammengefasst: Das Quadrat in b) hat die größere Fläche, die Kantenlänge des anderen Quadrates beträgt $\frac{1}{3}\sqrt{8}$.

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$(x^2 - 5x + 5)^{(x^2-9x+20)} = 1.$$

Lösung: Sind a und b reelle Zahlen mit $a^b = 1$, so liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. $b = 0$, a beliebig.
2. $a = 1$, b beliebig.
3. $a = -1$, $b \in \mathbb{Z}$ gerade.

In der Situation der Aufgabe tritt Fall 1 ein, wenn $x^2 - 9x + 20 = 0$ ist, also für $x = 4$ und $x = 5$.

Fall 2 tritt ein, wenn $x^2 - 5x + 5 = 1$ ist, also für $x = 4$ und $x = 1$.

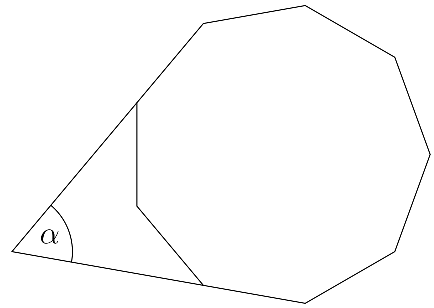
Damit Fall 3 eintritt, muss $x^2 - 5x + 6 = 0$ sein, also $x = 2$ oder $x = 3$.
Ist $x = 2$, so ist $x^2 - 9x + 20$ ungerade, 2 ist also keine Lösung.
Für $x = 3$ ist dagegen $x^2 - 9x + 20$ gerade, 3 ist also Lösung.

Insgesamt ist die Gleichung also für $x = 1, 3, 4$ und 5 erfüllt, für alle anderen reellen Zahlen nicht.

Aufgabe S 3 (4 Punkte)

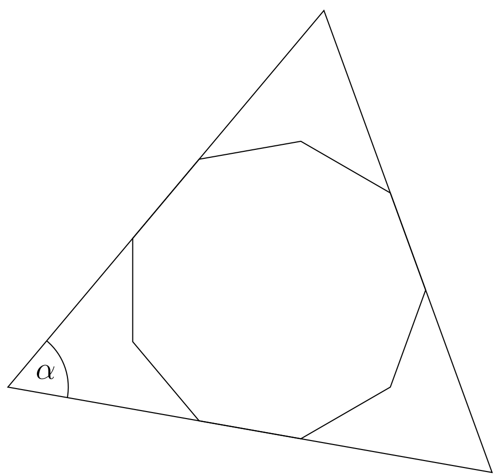
Gegeben ist ein regelmäßiges Neuneck.

Wie groß ist der Winkel α?



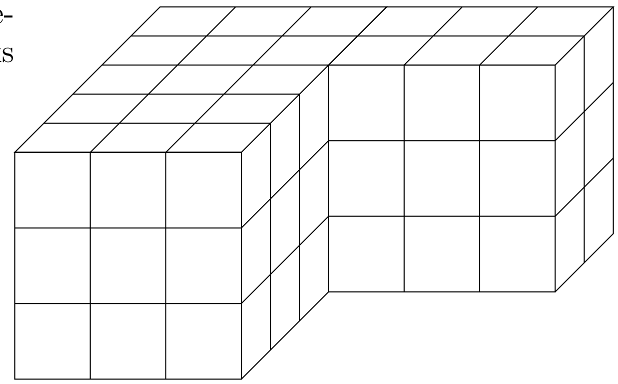
Lösung: Der Innenwinkel im regelmäßigen n-Eck beträgt $180° - \frac{360°}{n}$, im Neuneck also $140°$. Die Winkelsumme in dem Viereck, das den Winkel α und drei Ecken des Neunecks enthält, ist also $360° = \alpha + 40° + 220° + 40°$, woraus $\alpha = 60°$ folgt.

Eleganter ist es, die Schenkel des Winkels α zu verlängern und ebenso die α gegenüberliegende Neuneckseite zu verlängern. Es entsteht ein gleichseitiges Dreieck, dessen Winkel α ist:



Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Ein L-förmiger Block wird wie abgebildet aus 63 weißen Einheitswürfeln gebildet. Anschließend wird die gesamte Oberfläche des Blocks rot angestrichen.



Wie viele der 63 Würfel haben

a) keine rote Fläche,

b) genau eine rote Fläche,

c) genau zwei rote Flächen,

d) drei rote Flächen?

Lösung: a) 4 b) 20 c) 29 d) 10

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Welche Koordinaten hat der Schnittpunkt S der beiden durch die folgenden Gleichungen beschriebenen Geraden?

$$628x + 372y = 5512$$
$$372x + 628y = 4488$$

Lösung: Addition und Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

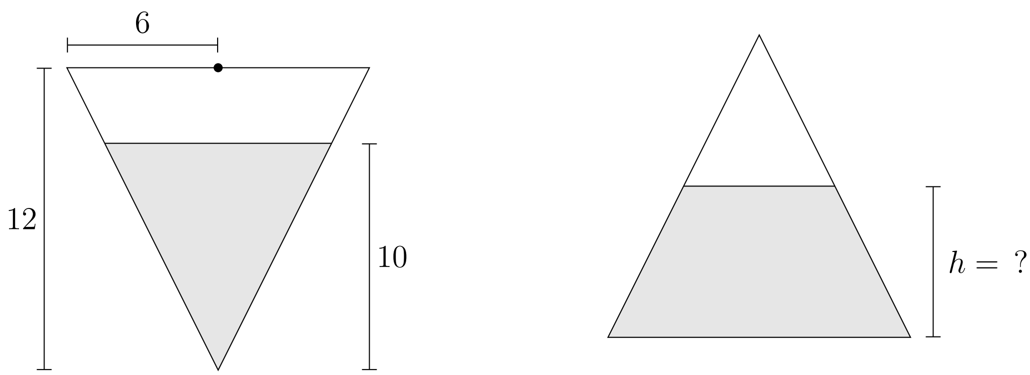
$$1000(x + y) = 10000$$
$$256(x - y) = 1024$$

und damit $x + y = 10$ und $x - y = 4$. Somit hat S die Koordinaten $(7, 3)$.

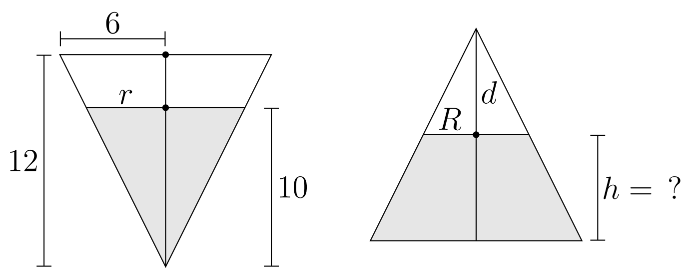
Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Ein Kegel mit der Höhe 12 cm und dem Grundkreisradius 6 cm steht auf der Spitze und wird mit Wasser gefüllt, bis es 10 cm hoch steht.

Wie hoch steht das Wasser, wenn der Kegel umgedreht wird?



Lösung:



Der Radius r der Wasseroberfläche ergibt sich aus

$$\frac{r}{10} = \frac{6}{12}, \quad \text{also zu} \quad r = 5.$$

Somit ist das Wasservolumen $V_W = \frac{1}{3}\pi 5^2 \cdot 10$.

Da der gesamte Kegel das Volumen $V = \frac{1}{3}\pi 6^2 \cdot 12$ hat, ist das Volumen des (luftgefüllten) Kegelstumpfes oberhalb des Wassers

$$V_L = V - V_W = \frac{1}{3}\pi(432 - 250) = \frac{1}{3}\pi 182.$$

Nach Umdrehen des Kegels füllt die Luft einen Kegel der Höhe d und des Grundkreisradius' R, wobei wieder gilt $\frac{R}{d} = \frac{1}{2}$, also $d = 2R$.

Das Volumen dieses Kegels ist $\frac{1}{3}\pi R^2 d = \frac{1}{3}\pi \cdot 2R^3$. Da dies gleich dem vorher berechneten Volumen V_L sein muss, folgt

$$R^3 = 91$$

und somit

$$h = 12 - d = 12 - 2 \cdot \sqrt[3]{91}.$$

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

a) Wie viele dreistellige Zahlen mit drei verschiedenen Ziffern gibt es?

b) Bei wie vielen dieser Zahlen ist eine Ziffer der Mittelwert der beiden anderen Ziffern? (Beispiel: 195 und 210 sind solche Zahlen, denn es gilt $5 = \frac{1+9}{2}$ und $1 = \frac{0+2}{2}$.)

Lösung: a) Für die erste Ziffer gibt es 9 Möglichkeiten, nämlich $1, 2, \ldots, 9$. Für die zweite Ziffer gibt es jeweils wieder 9 Möglichkeiten, nämlich jede der Ziffern $0, 1, \ldots, 9$ außer der ersten. Schließlich gibt es für die dritte Ziffer jeweils noch acht Möglichkeiten. Also gibt es insgesamt

$$9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$$

dreistellige Zahlen mit drei verschiedenen Ziffern.

b) Ist eine Ziffer der Zahl Mittelwert der beiden anderen Ziffern, so sind die beiden anderen die größte und die kleinste Ziffer der Zahl, und sie sind entweder beide gerade oder beide ungerade. Umgekehrt ist der Mittelwert durch die beiden anderen Ziffern natürlich festgelegt. Abgesehen von der Reihenfolge gibt es also zu jedem Paar von geraden und jedem Paar von ungeraden Ziffern eine solche Zahl. Von jeder Sorte gibt es $\binom{5}{2} = 10$ Paare, insgesamt also 20. Für jede derartige Kombination von Ziffern gibt es 6 verschiedene Reihenfolgen, wenn keine der Ziffern 0 ist, sonst nur 4. Also gibt es

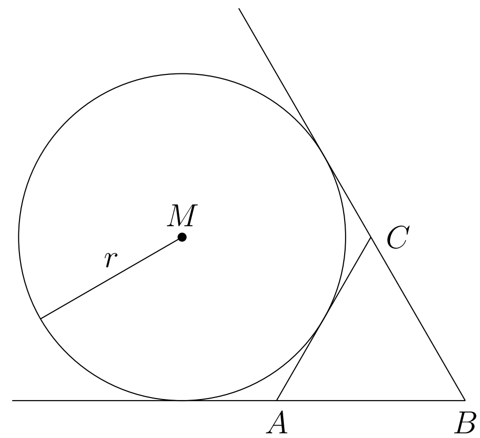
$$16 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = 112$$

solche Zahlen.

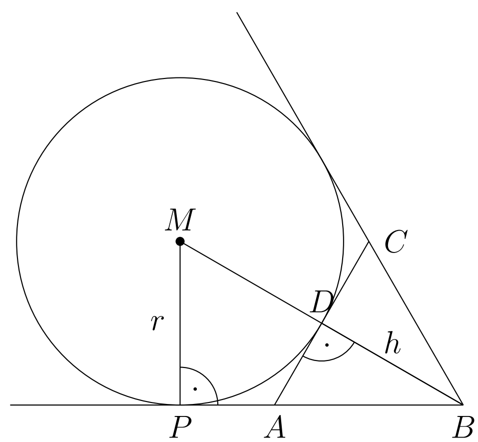
Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Ein gleichseitiges Dreieck ABC habe die Seitenlänge 4 cm. Verlängert man zwei der Seiten, lässt sich ein Kreis finden, der sowohl an den verlängerten Seiten als auch an der verbleibenden Dreiecksseite anliegt.

Wie groß ist der Kreisradius r?



Lösung:



Da die Dreiecke BMP und BAD ähnlich sind, ist

$$\frac{r}{2} = \frac{r+h}{4},$$

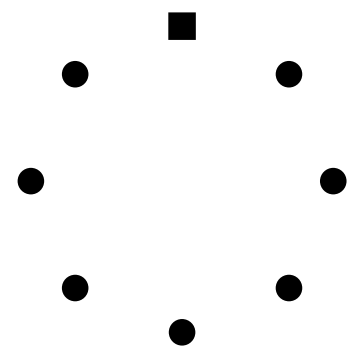
wobei h die Höhe des Dreiecks ABC ist, also $h = \sqrt{12}$. Also ist

$$r = h = 2\sqrt{3}.$$

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

In einem Garten liegen eine quadratische und sieben runde Steinplatten kreisförmig im Gras. Minnie steht auf der quadratischen Platte und wirft eine Münze. Bei „Kopf" hüpft sie im Uhrzeigersinn eine Platte weiter, bei „Zahl" hüpft sie eine Platte entgegen dem Uhrzeigersinn.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht Minnie nach achtmaligem Münzwurf und Hüpfen wieder auf der quadratischen Platte?



Lösung: Es gibt folgende Möglichkeiten, am Ende wieder auf der quadratischen Platte zu sein:

1. Achtmaliges Hüpfen im Uhrzeigersinn; die Wahrscheinlichkeit hierfür ist $\left(\frac{1}{2}\right)^8$.
2. Achtmaliges Hüpfen gegen den Uhrzeigersinn, ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^8$.
3. Viermal mit und viermal gegen den Uhrzeigersinn hüpfen; das geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^8}\binom{8}{4}$.

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{256} + \frac{1}{256} + \frac{70}{256} = \frac{9}{32}.$$