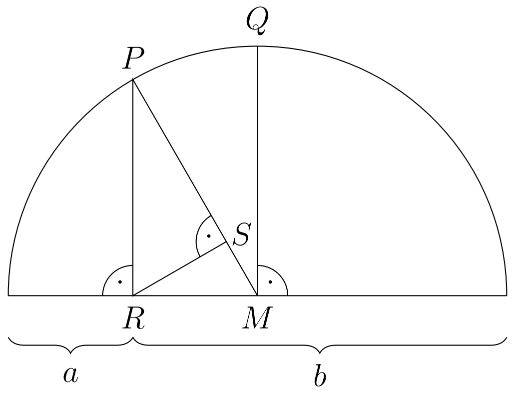
Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Seien a und b positive reelle Zahlen mit $a < b$.
In einem Halbkreis mit Durchmesser $a + b$ und Mittelpunkt M sind die Punkte P, Q, R und S eingezeichnet:



Berechnen Sie MR, RQ, MP, PR und PS.

Lösung:

$$\begin{aligned}
MR &= \frac{b+a}{2} - a = \frac{b-a}{2}\\
RQ &= \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2+a^2}{2}}\\
MP &= \frac{b+a}{2}\\
PR &= \sqrt{\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von PS setzen wir $\varphi = \measuredangle RPS = \measuredangle RPM$ und betrachten die Dreiecke RSP und RMP. Wir erhalten

$$PS = \cos\varphi \cdot PR = \frac{PR}{MP} \cdot PR = \frac{2ab}{a+b}.$$

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt:

$$27 \mid 10^n + 18n - 1.$$

Lösung:

Für $n = 1$ ist $10^1 + 18 \cdot 1 - 1 = 27$. Für $n \geq 2$ gilt

$$10^n = (9+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 9^i = 9^2 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} 9^{i-2} + 9n + 1.$$

Also ist

$$10^n + 18n - 1 = 27 \cdot 3 \cdot \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} 9^{i-2} + (9+18) \cdot n$$

durch 27 teilbar.

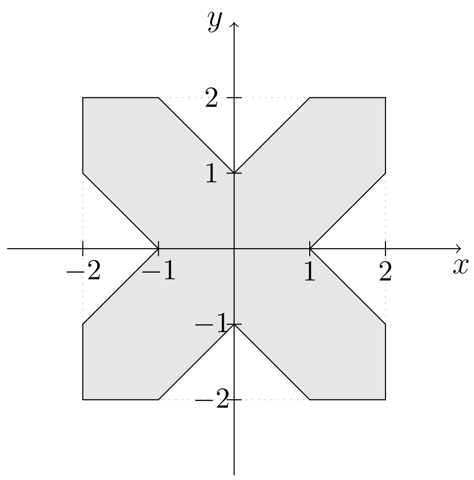
Aufgabe E 3 (8 Punkte)

Für die Punkte (x, y) eines Gebiets im Koordinatensystem gilt

$$|x| \leq 2, \quad |y| \leq 2 \quad \text{und} \quad \big|\, |x| - |y| \,\big| \leq 1.$$

Skizzieren Sie dieses Gebiet und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

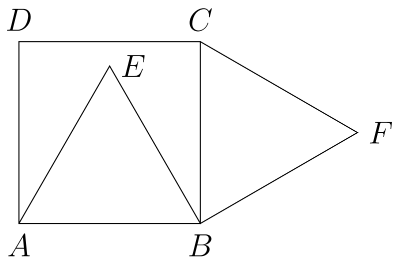
Lösung:



Der Flächeninhalt ist $4^2 - 4 \cdot 1 = 12$.

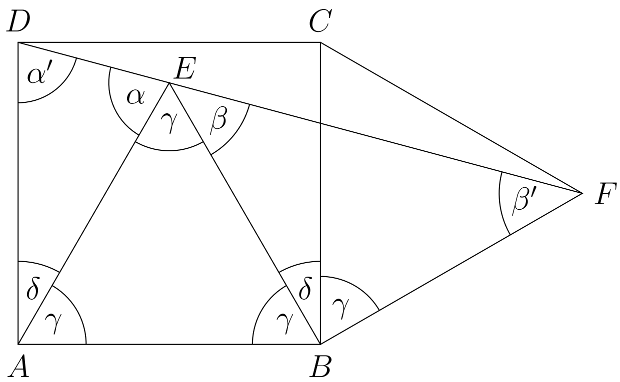
Aufgabe E 4 (8 Punkte)

In ein Quadrat $ABCD$ wird das gleichseitige Dreieck ABE eingezeichnet; außerdem wird das gleichseitige Dreieck BFC angehängt.



Zeigen Sie, dass die Punkte D, E und F auf einer Geraden liegen.

Lösung:



Für die eingezeichneten Winkel gilt

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \frac{\pi}{3} && \text{(Winkel im gleichseitigen Dreieck)},\\
\delta &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6},\\
\alpha' &= \alpha && \text{(weil } AD = AE\text{)},\\
\beta' &= \beta && \text{(weil } BE = BF\text{)},\\
\alpha &= \frac{1}{2}(\pi - \delta) = \frac{5}{12}\pi,\\
\beta &= \frac{1}{2}(\pi - (\gamma + \delta)) = \frac{1}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

Also ist $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.