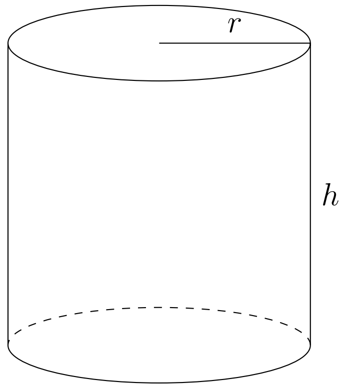
Aufgabe G 1 (9 Punkte)



Gesucht ist ein Zylinder, der bei gegebenem Volumen V eine möglichst kleine Oberfläche hat.

Berechnen Sie für einen solchen Zylinder das Verhältnis der Höhe h zum Radius r.

Lösung:

Das Volumen des Zylinders ist $V = \pi r^2 h$, also $h = \frac{V}{\pi r^2}$.
Die Oberfläche des Zylinders ist

$$F = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2(\pi r^2 + \frac{V}{r}).$$

Damit die Oberfläche minimal wird, muss die Ableitung von F nach r Null werden:

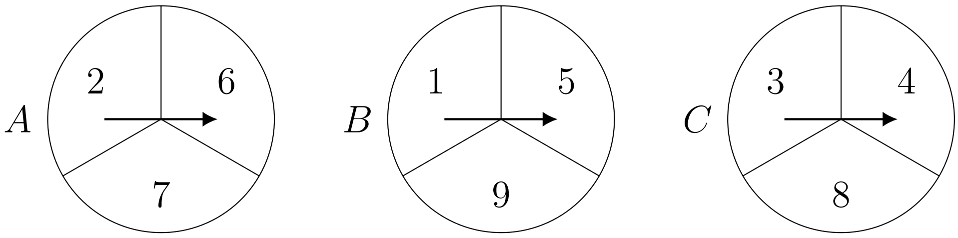
$$0 = F'(r) = 2(2\pi r - \frac{V}{r^2}).$$

Daraus folgt $2\pi r^3 = V = \pi r^2 h$ und wegen $r \neq 0$ bedeutet das

$$h = 2r \quad \text{bzw.} \quad \frac{h}{r} = 2.$$

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Beim Drehen der folgenden „Glücksräder“ erscheint jeder Sektor mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.



a) Berechnen Sie für jedes Paar von Glücksrädern die Wahrscheinlichkeit, dass das eine gegen das andere gewinnt.

b) Nun wird jedes Glücksrad zweimal gedreht und die Ergebnisse werden addiert.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt A gegen B?
Und mit welcher gewinnt B gegen A?

Lösung:

a) Für jedes Paar gibt es neun Kombinationen von Ergebnissen, alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$. Für jedes Ergebnis des ersten Glücksrads notieren wir, gegen wie viele Ergebnisse des zweiten Glücksrads es gewinnt:

A gegen B:

2	6	7
1	2	2

A gegen C:

2	6	7
0	2	2

B gegen C:

1	5	9
0	2	3

Also gewinnt A gegen B mit Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{9}$, A gegen C mit $\frac{4}{9}$ (und somit C gegen A mit $\frac{5}{9}$) und B gegen C mit $\frac{5}{9}$.

b) Wir notieren zunächst für beide Glücksräder die möglichen Summen mit ihren jeweiligen Häufigkeiten:

AA

4	8	9	12	13	14
1	2	2	1	2	1

,

BB

2	6	10	14	18
1	2	3	2	1

.

Das ergibt folgende Gewinnhäufigkeiten für AA gegen BB:

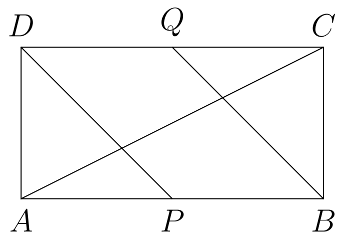
4	8	9	12	13	14
1	6	6	6	12	6

.

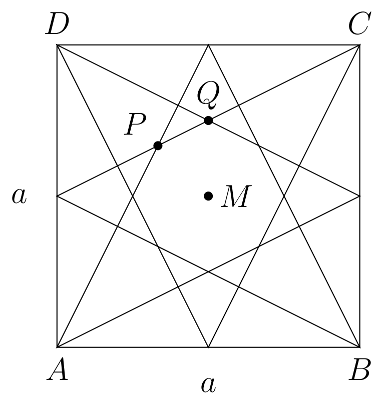
Also gewinnt jetzt A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1+6+6+6+12+6}{81} = \frac{37}{81}$ gegen B.
Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{81}$ haben A und B die gleiche Summe, also gewinnt B gegen A mit Wahrscheinlichkeit $\frac{81-37-2}{81} = \frac{42}{81}$.

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

a) Zeigen Sie: In einem Rechteck $ABCD$ wird die Diagonale AC durch DP und QB in gleichlange Teilstücke zerlegt. Dabei sind P und Q die Seitenmitten von AB bzw. DC.



b) In einem Quadrat $ABCD$ mit Seitenlänge a und Mittelpunkt M werden die vier Ecken mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbunden.

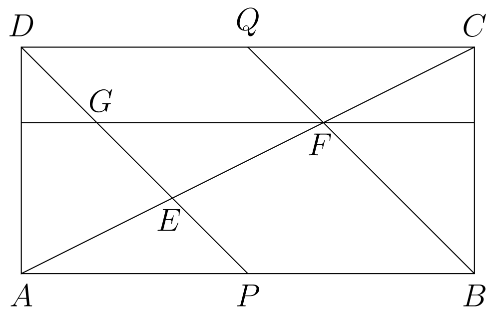


Im Inneren entsteht dadurch ein Achteck mit Mittelpunkt M. Seien P und Q zwei benachbarte Ecken dieses Achtecks.

Berechnen Sie MP, MQ und den Flächeninhalt F des Achtecks.

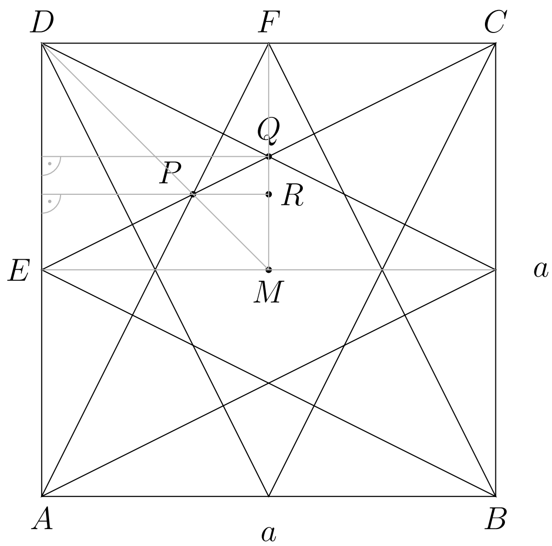
Lösung:

a)



Zieht man durch den Schnittpunkt F von AC mit QB die Parallele zu AB, so entstehen die Dreiecke APE, EFG und FCQ. Diese sind kongruent: ihre horizontale Seite ist jeweils halb so lang wie AB (es ist $GF = DQ$, weil $GFQD$ ein Parallelogramm ist), und ihre Winkel sind als Stufen- bzw. Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen gleich.

b)



Q halbiert MF, also ist $MQ = \frac{a}{4}$.
P liegt aus Symmetriegründen auf DM; nach a) ist daher $MP = \frac{1}{3}MD = \frac{1}{3}\frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Ebenfalls nach a) ist $PQ = \frac{1}{3}EQ$ und daher $PR = \frac{1}{3}EM = \frac{a}{6}$.
Damit ist der Flächeninhalt F_Δ des Dreiecks MQP gegeben durch

$$F_\Delta = \frac{1}{2} \cdot MQ \cdot PR = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^2}{48}.$$

Das Achteck setzt sich aus acht solchen Dreiecken zusammen, also ist

$$F = 8 \cdot F_\Delta = \frac{a^2}{6}.$$

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Axel, Bert und Carl wollen von ihrem Haus zu einer 11 km entfernten Hütte gelangen. Sie haben dazu ein Fahrrad mit Gepäckträger zur Verfügung.

Axel fährt mit dem Fahrrad, die beiden anderen gehen zu Fuß oder sitzen auf dem Gepäckträger. Fährt Axel allein auf dem Fahrrad, kann er 15 km/h schnell fahren, sitzt einer der beiden anderen auf dem Gepäckträger, sind es nur 12 km/h. Zu Fuß gehen sie mit einer Geschwindigkeit von 3 km/h.

Während Carl zunächst zu Fuß geht, fährt Axel mit Bert auf dem Gepäckträger vom Haus bis zu einer Stelle, wo er ihn ablädt und dieser dann zu Fuß weitergeht. Anschließend fährt Axel allein zurück, bis er auf Carl trifft. Carl setzt sich auf den Gepäckträger und beide fahren zusammen zur Hütte. Alle drei kommen gleichzeitig an der Hütte an.

Wie lange brauchen sie zur Hütte?

Lösung:

Wir bezeichnen die Entfernung vom Haus bis zu der Stelle, an der Axel Bert absetzt, mit x, und die Entfernung vom Haus zum Treffpunkt von Axel und Carl mit y (beides in km).

Dann legt Bert bis zur Hütte also x km mit 12 km/h und $11 - x$ km mit 3 km/h zurück. Dafür braucht er

$$\frac{x}{12} + \frac{11-x}{3} \quad \text{Stunden.}$$

Entsprechend braucht Carl bis zur Hütte

$$\frac{y}{3} + \frac{11-y}{12} \quad \text{Stunden.}$$

Da beide gleichzeitig ankommen, haben wir die Gleichung

$$\frac{x}{12} + \frac{11-x}{3} = \frac{y}{3} + \frac{11-y}{12}.$$

Durch Umformen erhalten wir daraus

$$x + y = 11.$$

Bis zum Treffpunkt von Axel und Carl war Carl $\frac{y}{3}$ Stunden unterwegs, während Axel $\frac{x}{12} + \frac{x-y}{15}$ Stunden gebraucht hat. Wir haben also als zweite Gleichung

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{12} + \frac{x-y}{15},$$

die wir zu

$$8y = 3x$$

vereinfachen. Aus den beiden Gleichungen erhalten wir $x = 8$ und $y = 3$.

Die benötigte Zeit bis zur Hütte ist also

$$\frac{8}{12} + \frac{11-8}{3} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \text{ Stunden oder 100 Minuten.}$$