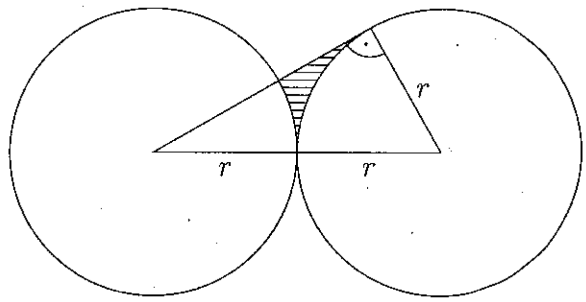
Aufgabe S 1 (4 Punkte)

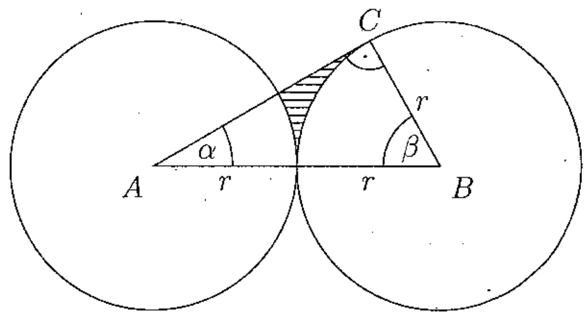
Zwei Kreise mit Radius r berühren sich.

Vom Mittelpunkt des einen Kreises wird eine Tangente an den zweiten Kreis gezogen.



Berechnen Sie die Fläche zwischen der Tangente und den Kreisen (in der Skizze schraffiert).

Lösung:



Nach Pythagoras ist $AC = r\sqrt{3}$, was der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $2r$ entspricht. Daher ist $\beta = \frac{\pi}{3}$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $\frac{1}{2}r^2\sqrt{3}$. Also ist der gesuchte Flächeninhalt

$$\frac{1}{2}r^2\sqrt{3} - \frac{1}{12}\pi r^2 - \frac{1}{6}\pi r^2 = r^2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}).$$

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Schreiben Sie 2019 im 8er-System, d. h. berechnen Sie a, b, c und d, sodass gilt:

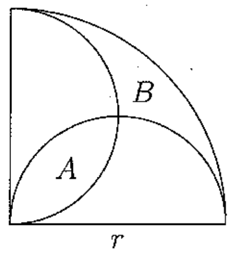
$$2019_{10} = abcd_8.$$

Lösung:

$$2019 = 1536 + 448 + 32 + 3 = 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 = 3743_8.$$

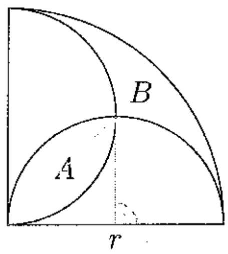
Aufgabe S 3 (4 Punkte)

In einem Viertelkreis mit Radius r begrenzen zwei Halbkreise mit Radius $\frac{r}{2}$ die Gebiete A und B.



Berechnen Sie den Flächeninhalt von A und den Flächeninhalt von B.

Lösung:



Für den Flächeninhalt F_A von A gilt

$$\frac{1}{2}F_A = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2,$$

$$\text{also} \qquad F_A = \frac{r^2}{4}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Für den Flächeninhalt F_B von B gilt

$$F_B = \frac{1}{4}\pi r^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 + F_A = F_A.$$

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Für welche reellen Zahlen x bzw. y gilt

a) $\log \sqrt[3]{x} = \sqrt{\log x}$ (hier bezeichnet log den Zehnerlogarithmus).

b) $2^{2y+2} = 9 \cdot 2^y - 2$

Lösung

a) Es ist $\log \sqrt[3]{x} = \log\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\log x$.

Da log nur für positive Zahlen definiert ist, muss $x > 0$ sein. Also erhält man dieselben Lösungen, wenn man beide Seiten der Gleichung quadriert:

$$\frac{1}{9}(\log x)^2 = \log x.$$

Die beiden Lösungen sind also

$$\begin{aligned} \log x &= 0, \quad \text{also} \quad x_1 = 1 \qquad \text{und} \\ \log x &= 9, \quad \text{also} \quad x_2 = 10^9. \end{aligned}$$

b) Es ist $2^{2y+2} = 4 \cdot (2^y)^2$. Setzt man $x = 2^y$, so lautet die zu lösende Gleichung also

$$4x^2 - 9x + 2 = 0.$$

Sie hat die Lösungen

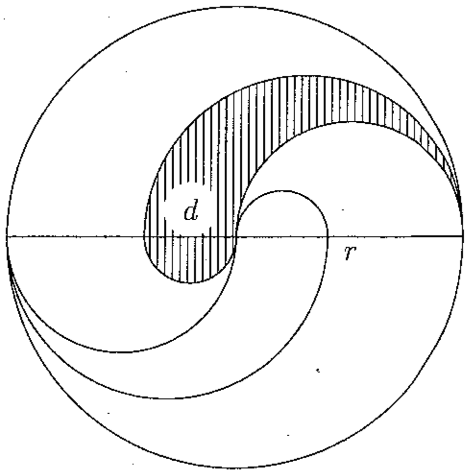
$$x_{1,2} = \frac{9}{8} \pm \sqrt{\frac{81}{64} - \frac{32}{64}} = \frac{9}{8} \pm \frac{7}{8}.$$

Also ist $x_1 = 2$ und $x_2 = \frac{1}{4}$ und damit

$$y_1 = 1 \quad \text{und} \quad y_2 = -2.$$

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Gegeben sind ein Kreis mit Radius r und eine positive Zahl $d < r$.
Der Kreis wird wie in der Abbildung durch Halbkreise in vier Figuren unterteilt.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt F der schraffierten Figur in Abhängigkeit von d und r.

b) Berechnen Sie das Verhältnis $\frac{r}{d}$, wenn die vier Figuren alle gleichen Flächeninhalt haben.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r+d}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{8}\left(r^2 + 2rd + d^2 + d^2 - r^2\right) \\ &= \frac{\pi}{4}d(d+r). \end{aligned}$$

b) Die Flächeninhalte sind genau dann alle gleich, wenn $F = \frac{1}{4}\pi r^2$ ist, nach a) also, wenn gilt:

$$r^2 = d(d+r) \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{r}{d}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r}{d}\right).$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, und da r und d beide positiv sind, muss gelten

$$\left(\frac{r}{d}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

d. h. d teilt den Radius r im Goldenen Schnitt.

Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Seien a, b und c die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Berechnen Sie $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Lösung:
Da a, b und c die Gleichung lösen, sind $x - a$, $x - b$ und $x - c$ Teiler von $x^3 - 7x^2 + 3x + 1$. Es gilt also

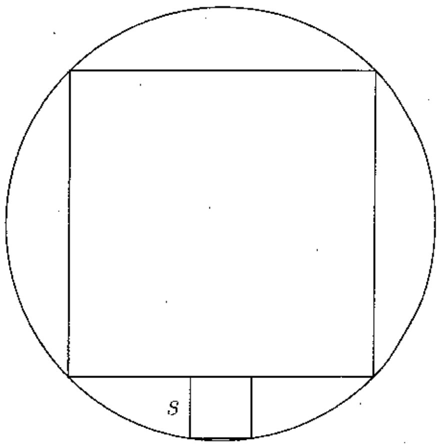
$$x^3 - 7x^2 + 3x + 1 = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten liest man daraus $ab + ac + bc = 3$ und $abc = -1$ ab. Also ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + ac + bc}{abc} = -3.$$

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

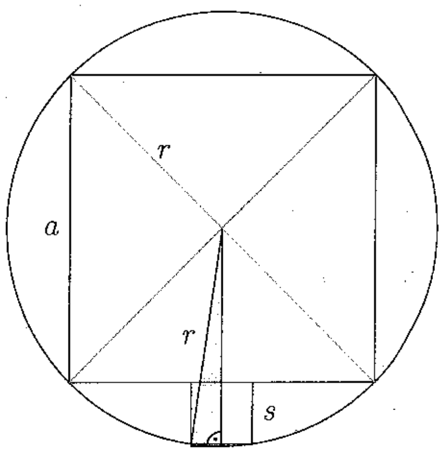
Gegeben ist ein Quadrat mit Umkreisradius r.
In einen der Kreisabschnitte ist ein Quadrat mit Seitenlänge s einbeschrieben.



a) Berechnen Sie s in Abhängigkeit von r.

b) Berechnen Sie das Verhältnis der beiden Quadratflächen.

Lösung:



a) Aus dem grau gefüllten Dreieck erhält man folgende Gleichung:

$$\left(\frac{a}{2}+s\right)^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2=r^2.$$

Einsetzen von $a=r\sqrt{2}$ führt auf die quadratische Gleichung

$$s^2+\frac{4}{5}\sqrt{2}rs-\frac{2}{5}r^2=0$$

mit der einzigen positiven Lösung

$$s = -\frac{2}{5}\sqrt{2}r + \sqrt{\frac{8}{25}r^2 + \frac{10}{25}r^2} = \frac{\sqrt{2}}{5}r.$$

b) Das große Quadrat hat den Flächeninhalt $F = a^2 = 2r^2$, das kleine $f = s^2 = \frac{2}{25}r^2$. Somit ist $F = 25f$.

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Eine Großmutter sagt: „Meine Tochter und mein Enkelkind werden im Jahr 2019 so alt wie die Quersumme ihres Geburtsjahres."

Wie alt sind die beiden am Ende des Jahres 2019?

Lösung:

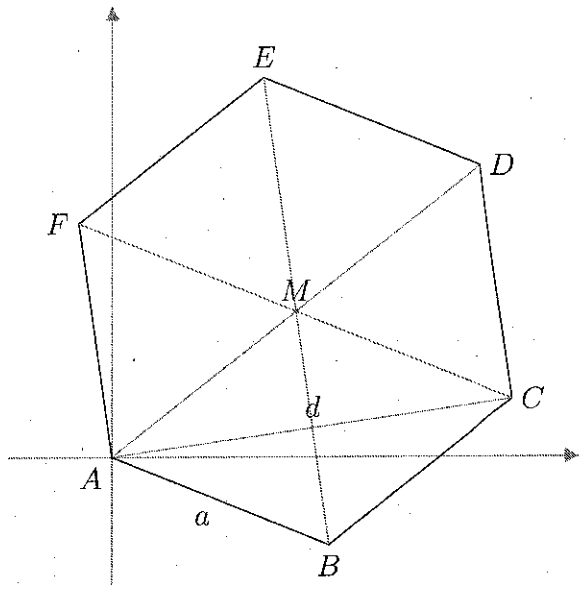
Das Enkelkind ist 2013 geboren und wird 2019 sechs Jahre alt,
die Tochter ist 1995 geboren und wird 24 Jahre alt.

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Gegeben ist ein regelmäßiges Sechseck $ABCDEF$ im Koordinatensystem.
Die Ecken A und C haben die Koordinaten $(0\,|\,0)$ bzw. $(7\,|\,1)$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sechsecks.

Lösung:



Ein regelmäßiges Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, das Viereck $ABCM$ ist also eine Raute und AC steht senkrecht auf MB. Daher gilt

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2,$$

also $d^2 = 3a^2$. Aus den gegebenen Koordinaten folgt $d^2 = 50$. Somit ist der Flächeninhalt F des Sechsecks

$$F = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{d^2}{2}\sqrt{3} = 25\sqrt{3}.$$