

Tag der Mathematik 2023

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.
Elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

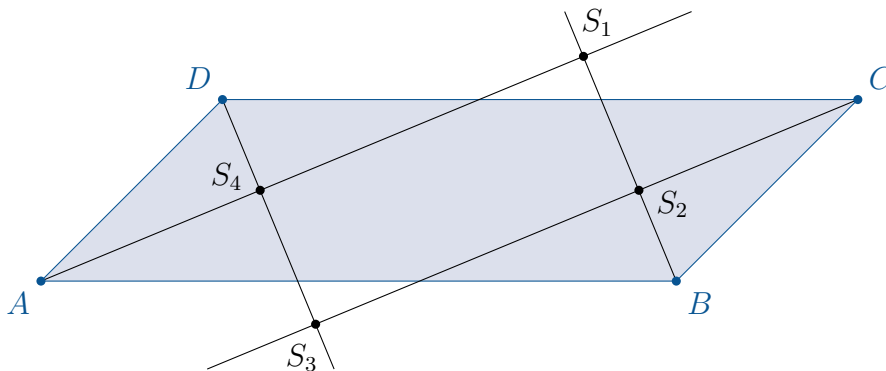
Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

In einem Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ seien die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei A , B , C und D konstruiert. Ihre Schnittpunkte seien wie in der Abbildung mit S_1 , S_2 , S_3 und S_4 bezeichnet.



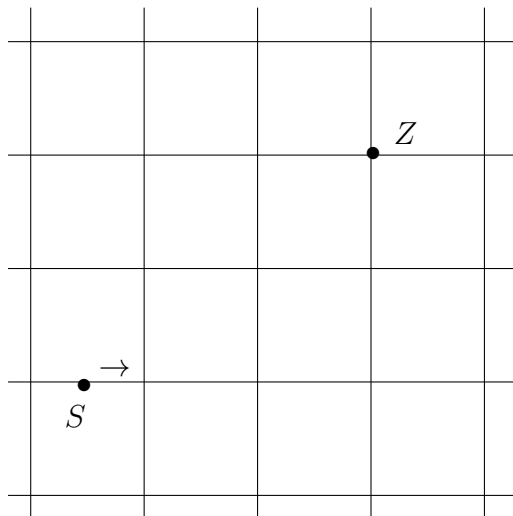
- Beweisen Sie, dass das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ unter diesen Voraussetzungen stets ein Rechteck ist.
- Zusätzlich werde nun vorausgesetzt, dass der Punkt S_1 auf der Strecke CD liegt. Ermitteln Sie das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{BC}$.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

Markus ist in einer ihm unbekanntem Stadt, deren Straßen in einem quadratischen Gitternetz angeordnet sind. Er befindet sich am Punkt S und möchte zum Punkt Z , dessen Position er aber nicht kennt. Aufgrund vager Hinweise geht er in Pfeilrichtung los und entscheidet an jeder Kreuzung folgendermaßen, wie er seinen Weg fortsetzt: Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ geht er geradeaus weiter, mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ biegt er nach links ab und mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ biegt er nach rechts ab.

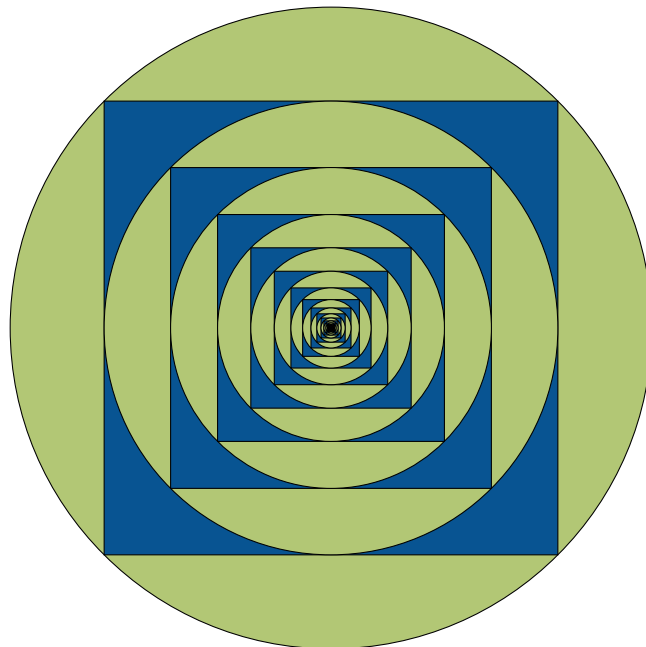
Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht er mit dieser Strategie das Ziel Z auf kürzestem Weg, also an der fünften Kreuzung?



Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

In einen hellen Kreis mit Radius 1 Meter ist ein Quadrat eingeschrieben und dunkel gefärbt. In dieses Quadrat wird ein Kreis eingeschrieben und hell gefärbt. In diesen wieder ein Quadrat. Wir stellen uns vor, dass das immer so weiter geht.



Welcher Anteil der Fläche des großen Kreises ist dann hell gefärbt?

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat von seinen Wichteln eine Lichterkette mit 365 Lämpchen geschenkt bekommen. Die Lämpchen sind alle von 1 bis 365 nummeriert und können einzeln ein- und ausgeschaltet werden. An Heiligabend (24.12.) wird die Kette überreicht und alle Lämpchen leuchten. Am darauffolgenden ersten Weihnachtsfeiertag (25.12.) werden zunächst alle Lämpchen ausgeknipst. Am zweiten Tag nach Heiligabend wird jedes zweite Lämpchen wieder eingeschaltet. Am dritten Tag wird jedes dritte Lämpchen umgeschaltet, also ausgeknipst, wenn es leuchtete und angeknipst, wenn es aus war. Und so weiter. Am k -ten Tag nach Heiligabend wird jedes Lämpchen, dessen Nummer durch k teilbar ist, umgeschaltet.

- a) Brennt das Lämpchen mit der Nummer 24 am nächsten Heiligabend?
- b) Brennt das Lämpchen mit der Nummer 144 am nächsten Heiligabend?
- c) Wieviele Lämpchen leuchten am nächsten Heiligabend **nicht**?