

Tag der Mathematik 2022

Gruppenwettbewerb

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Taschenrechner sind nicht zugelassen.

Teamnummer	Name und Vorname eines Teammitglieds

Die folgende Tabelle wird von den Korrektoren ausgefüllt.

Aufgabe	G 1	G 2	G 3	G 4	Summe
Mögliche Punktzahl	9	9	9	9	36
Erreichte Punktzahl					

Aufgabe G 1 (9 Punkte)

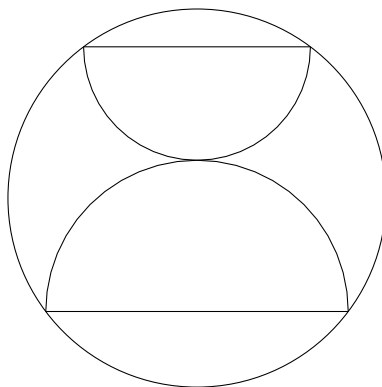
Ersetzen Sie in der folgenden Rechnung die Buchstaben durch Ziffern:

$$\begin{array}{rcccccc} & Z & E & R & O & E & S \\ + & & & & O & N & E & S \\ \hline & B & I & N & A & R & Y \end{array}$$

Dabei entsprechen gleiche Buchstaben gleichen Ziffern und verschiedene Buchstaben verschiedenen Ziffern. Außerdem ist die erste Ziffer einer Zahl immer ungleich 0.

Aufgabe G 2 (9 Punkte)

In einen Kreis vom Radius 1 werden zwei Halbkreise wie in der Skizze eingezeichnet.



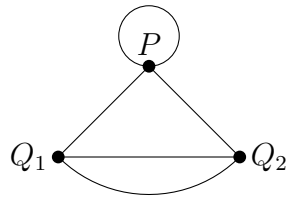
Welche Fläche haben die beiden Halbkreise zusammen?

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

Ein *Graph* besteht aus Ecken und Kanten zwischen manchen Ecken. Zwischen zwei Ecken darf es mehrere Kanten geben; eine Kante kann auch eine Ecke mit sich selbst verbinden (“Schleife”). Ein Graph heißt *zusammenhängend*, wenn je zwei Ecken durch einen Kantenzug verbunden sind.

Für eine Ecke P sei $\text{ord}(P)$ die Anzahl der Kanten an P . Dabei zählt jede Kante an beiden Endpunkten mit, eine Schleife zählt also doppelt.

Abgebildet ist ein zusammenhängender Graph mit 3 Ecken und 5 Kanten mit $\text{ord}(Q_1) = \text{ord}(Q_2) = 3$ und $\text{ord}(P) = 4$.



Bestimmen Sie alle zusammenhängenden Graphen G mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\text{ord}(P) \geq 3$ für jede Ecke P von G ,
- (ii) G hat höchstens 2 Kanten mehr als Ecken.

Aufgabe G 4 (9 Punkte)

Seien $0 < b \leq a$ ganze Zahlen, sodass auch

$$c = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

eine ganze Zahl ist.

- (a) Zeigen Sie: Mit denselben Werten für b und c gibt es eine weitere ganze Zahl $\tilde{a} \neq a$ mit $c = \frac{\tilde{a}^2 + b^2}{\tilde{a}b + 1}$.
- (b) Für \tilde{a} aus (a) gilt $0 \leq \tilde{a} < b$.
- (c) Folgern Sie, dass c ein Quadrat sein muss.
- (d) Ein mögliches Zahlenpaar, das die obigen Bedingungen erfüllt, ist $a = b = 1$.
Finden Sie ein Beispiel mit $b \geq 2$.

Hinweis: Sie können (d) auch lösen ohne vorher alle Teile bearbeitet zu haben.