Aufgabe E 1 (8 Punkte)

Ein durch und durch weißer Würfel wird rot angestrichen und danach in $4 \times 4 \times 4 = 64$ gleiche Teilwürfel zerlegt. Von diesen 64 kleinen Würfeln wird einer zufällig ausgewählt und geworfen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Seite gewürfelt wird?

Lösung: Die Anzahl der kleinen roten Flächen ist $6 \cdot 4 \cdot 4$, da jede Fläche des ursprünglichen Würfels ja in $4 \cdot 4$ Teilflächen zerlegt wird.

Die Anzahl aller Flächen der kleinen Würfel ist $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

Der Anteil aller roten Flächen daran ist

$$\frac{6 \cdot 4 \cdot 4}{6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4},$$

und das ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe E 2 (8 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Zahlen rational oder irrational sind:

a) $r = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

b) $s = \sqrt[3]{25 + 5\sqrt{20}} + \sqrt[3]{25 - 5\sqrt{20}}$.

Hinweis: Die binomische Formel

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

darf benutzt werden.

Lösung:

a) Es ist

$$r^2 = \frac{4 \cdot (2 + 2\sqrt{2 \cdot 6} + 6)}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4 \cdot (8 + 4\sqrt{3})}{2 + \sqrt{3}} = 16$$

und damit $r = 4$ rational.

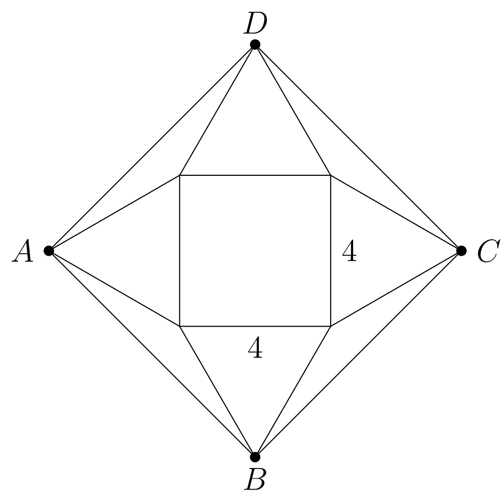
b) Wir benutzen den Hinweis für $a = \sqrt[3]{25 + 5\sqrt{20}}$ und $b = \sqrt[3]{25 - 5\sqrt{20}}$. Es folgt

$$\begin{aligned} s^3 &= \left(25 + 5\sqrt{20}\right) + \left(25 - 5\sqrt{20}\right) + 3\sqrt[3]{(25 + 5\sqrt{20}) \cdot (25 - 5\sqrt{20})} \cdot s \\ &= 50 + 3\sqrt[3]{125}s \\ &= 50 + 15s. \end{aligned}$$

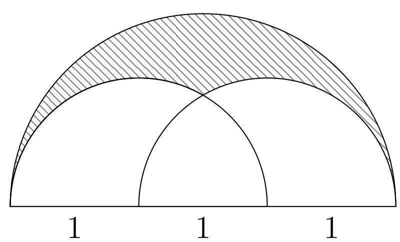
Das Polynom $x^3 - 15x - 50 = (x-5) \cdot (x^2 + 5x + 10)$ hat nur eine reelle Nullstelle, nämlich $x = 5$, und daher ist $s = 5$ rational.

Aufgabe E 3 (8 Punkte)

a) Über den vier Seiten eines Quadrats mit Seitenlänge 4 werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet. Deren Ecken A, B, C und D werden zu einem Viereck verbunden. Berechnen Sie dessen Fläche.



b) Zwei Halbkreise mit Radius 1 und ein Halbkreis mit Radius 1,5 begrenzen das in der Abbildung schraffierte Gebiet. Berechnen Sie dessen Fläche.



Lösung:

a) Da das Viereck $ABCD$ bei der Drehung um $90°$ um den Mittelpunkt des gegebenen Quadrates in sich übergeht, ist es ein Quadrat.

Da die Höhe der jeweils angesetzten gleichseitigen Dreiecke $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4$ beträgt, hat das Quadrat die Diagonalenlänge

$$4 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 4 \cdot (1 + \sqrt{3}).$$

Die Kantenlänge ist also $2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$, und der Flächeninhalt demnach

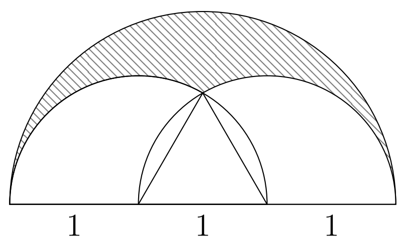
$$8 \cdot (1 + 2\sqrt{3} + 3) = 16 \cdot (2 + \sqrt{3}).$$

b) Die Vereinigung der beiden Halbkreise mit Radius 1 setzt sich aus zwei Drittelkreisen und einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge 1 zusammen. Sie hat demnach Flächeninhalt

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

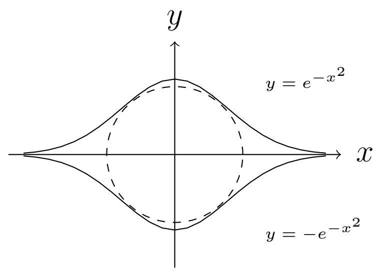
Des Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist daher

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 \pi - \left(\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{11}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Aufgabe E 4 (8 Punkte)

Gegeben sind die beiden Glockenkurven $y = e^{-x^2}$ und $y = -e^{-x^2}$. Berechnen Sie die Fläche des größten Kreises, der zwischen diese Kurven passt.



Hinweis: Die Ableitung von $y = e^{-x^2}$ ist $-2x \cdot e^{-x^2}$.

Lösung: Sei r der Radius des gesuchten Kreises und P der Punkt im ersten Quadranten, in dem der Kreis die Kurve berührt.

Der Radius r ist der kleinste Abstand von $(0|0)$ zu einem Punkt $(x|e^{-x^2})$ der Kurve, also hat nach Pythagoras die Funktion

$$x^2 + e^{-2x^2}$$

dort ein Minimum. Die Ableitung hiervon ist

$$2x - 4xe^{-2x^2} = 2x(1 - 2e^{-2x^2}).$$

Da in $x = 0$ ein lokales Maximum vorliegt (die zweite Ableitung ist negativ) muss beim Minimum $1 = 2e^{-2x^2}$ gelten, also

$$x^2 = \tfrac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}.$$

Der zugehörige Radius hat also das Quadrat

$$r^2 = x^2 + e^{-2x^2} = \ln \sqrt{2} + \tfrac{1}{2}$$

und der gesuchte Flächinhalt ist

$$\pi \cdot (\ln \sqrt{2} + \tfrac{1}{2}).$$