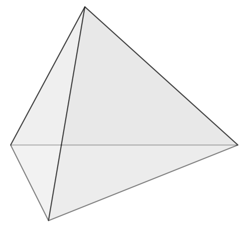
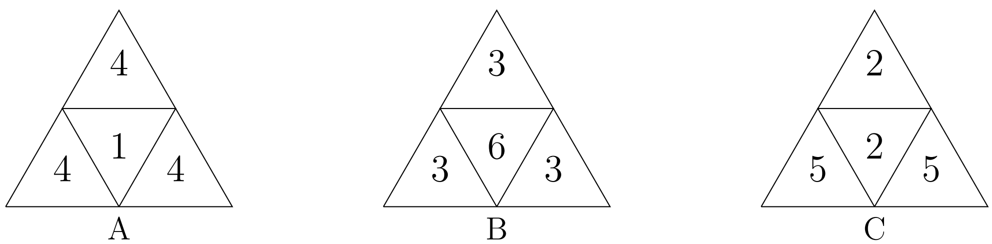
Aufgabe G 1 (9 Punkte)



Gegeben sind drei tetraederförmige Würfel, deren Seiten mit den folgenden Augenzahlen beschriftet sind:



Diese Tetraeder werden wie Würfel geworfen, wobei die Augenzahl der unten liegenden Seite zählt.

a) Wählen Sie jeweils zwei Tetraeder aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der eines der beiden beim Würfeln gewinnt.

b) Welches Tetraeder gewinnt, wenn alle drei gleichzeitig geworfen werden?

Lösung:

a) Es gibt für jede Paarung 16 mögliche Kombinationen der gewürfelten Seiten.

A gegen B: A gewinnt genau dann gegen B, wenn A eine 4 würfelt und B eine 3. Das passiert in $3 \cdot 3 = 9$ Fällen, d. h. A gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $9/16$ und B gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $7/16$.

A gegen C: A gewinnt genau dann gegen C, wenn A eine 4 würfelt und C eine 2. Das passiert in $3 \cdot 2 = 6$ Fällen, d. h. A gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $6/16 = 3/8$ und C gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $10/16 = 5/8$.

C gegen B: C gewinnt genau dann gegen B, wenn C eine 5 würfelt und B eine 3. Das passiert in $2 \cdot 3 = 6$ Fällen, d. h. C gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $6/16 = 3/8$ und B gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $10/16 = 5/8$.

b) Hier gibt es 64 mögliche Ergebnisse.

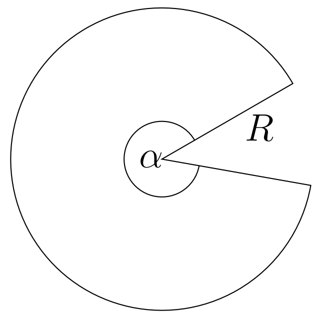
A gewinnt, wenn A eine 4, B eine 3 und C eine 2 würfelt. Das tritt in $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ Fällen ein, d. h. die Gewinnwahrscheinlichkeit von A ist $18/64 = 9/32$.

B gewinnt, wenn B eine 6 würfelt oder wenn B eine 3, A eine 1 und C eine 2 würfelt. Das tritt in $1 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 22$ Fällen ein, d. h. die Gewinnwahrscheinlichkeit von B ist $22/64 = 11/32$.

C gewinnt in allen anderen Fällen, das sind 24 Stück. Die Gewinnwahrscheinlichkeit von C ist somit $24/64 = 3/8$.

C ist demnach das stärkste Tetraeder, wenn alle drei gleichzeitig im Spiel sind.

Aufgabe G 2 (9 Punkte)



Beim Abwickeln eines Kegelmantels in die Ebene entsteht ein Kreisausschnitt mit Radius R und Zentriwinkel α.

Für welches α hat der Kegel maximales Volumen?

Lösung: Wenn α im Bogenmaß gemessen wird, dann ist der Umfang des Grundkreises des Kegels $\alpha \cdot R$. Sein Radius ist also $r = \frac{\alpha}{2\pi}R$, und sein Flächeninhalt ist demnach

$$F = r^2\pi = \frac{\alpha^2}{4\pi}R^2.$$

Die Höhe h des Kegels ergibt sich aus dem Radius des Grundkreises und der Länge der Mantellinie über den Satz des Pythagoras als

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

Damit hat der Kegel das Volumen

$$V = \frac{1}{3}F \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\alpha^2}{4\pi}\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}} \cdot R^3.$$

Dies wird maximal, wenn $\alpha^2\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ maximal wird. Leitet man diesen Ausdruck nach α ab, so erhält man

$$2\alpha \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}} + \frac{1}{2}\alpha^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}} \cdot (-\frac{2\alpha}{4\pi^2}) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}}\alpha \cdot \left((4 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}) - \frac{\alpha^2}{2\pi^2}\right).$$

Im Fall $\alpha = 0$ ist das Volumen 0 und damit nicht maximal. Auch $\alpha = 2\pi$ liefert Volumen 0, wir dürfen diesen Fall also ausschließen. Es muss also im Fall des maximalen Volumens der zweite Faktor 0 werden, also

$$4 - \frac{3\alpha^2}{2\pi^2} = 0.$$

Damit ist die positive Nullstelle

$$\alpha = 2 \cdot \sqrt{\tfrac{2}{3}} \cdot \pi$$

der gesuchte Winkel.

Aufgabe G 3 (9 Punkte)

In einem Koordinatensystem sei S die Menge aller Punkte $(x|y)$, für die gilt

$$|2x-1|+|2x+1|+\frac{4}{\sqrt{3}}|y|=4.$$

a) Zeigen Sie, dass S symmetrisch zu den Koordinatenachsen ist.

b) Bestimmen Sie S im ersten Quadranten. Unterscheiden Sie dazu die Fälle

$$0 \le x \le \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2} \le x \le 1 \text{ und } x > 1.$$

c) Skizzieren Sie S.

Lösung:

a) Wenn $(x|y)$ zu S gehört, dann auch $(-x|y)$, da

$$|2(-x)-1| = |2x+1| \quad \text{und} \quad |2(-x)+1| = |2x-1|.$$

Genauso gehört auch $(x|-y)$ zu S, denn $|-y| = |y|$.

b) Für $0 \le x \le 1/2$ ist $0 \le 2x \le 1$, und damit ist

$$|2x-1| = 1-2x,\ |2x+1| = 2x+1.$$

Da zudem im ersten Quadranten $y \ge 0$ gilt, gehört $(x|y)$ genau dann zu S, wenn gilt:

$$4 = 1-2x+1+2x+\frac{4y}{\sqrt{3}} = 2+\frac{4y}{\sqrt{3}},$$

d. h. $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Für $1/2 < x \le 1$ ist

$$|2x-1| = 2x-1,\ |2x+1| = 2x+1.$$

Daher gehört $(x|y)$ mit $y \ge 0$ genau dann zu S, wenn gilt:

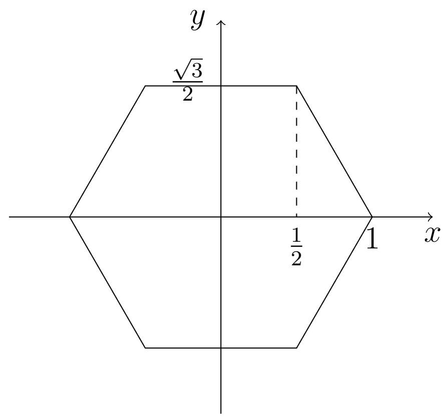
$$4 = 2x-1+2x+1+\frac{4y}{\sqrt{3}} = 4x+\frac{4y}{\sqrt{3}},$$

d. h.

$$y = \sqrt{3}\cdot(1-x).$$

Für $1 < x$ ist $|2x-1|+|2x+1| > 4$, also gibt es hier keine mögliche Wahl für y.

c) Es ergibt sich das folgende Bild:

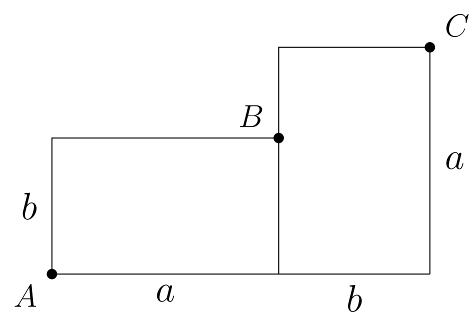


Aufgabe G 4 (9 Punkte)

a) Bei den abgebildeten Rechtecken liegen A, B und C auf einer Geraden. Zeigen Sie, dass das Seitenverhältnis $x := \frac{a}{b}$ die Gleichung

$$x^2 = x + 1$$

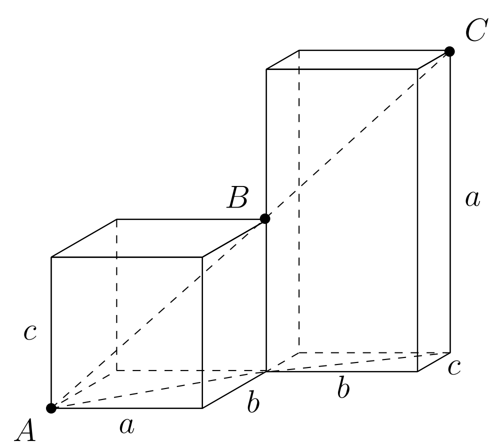
erfüllt.



b) Bei den abgebildeten Quadern liegen A, B und C auf einer Geraden. Zeigen Sie, dass das Seitenverhältnis $x := \frac{a}{b}$ die Gleichung

$$x^3 = x + 1$$

erfüllt.



Lösung:

a) Wegen des Strahlensatzes ist $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a}$. Nach Bilden des Kehrwertes führt dies auf

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}, \text{ also } 1 + x^{-1} = x.$$

Multiplizieren mit x auf beiden Seiten ergibt dann

$$1 + x = x^2.$$

b) Der Richtungsvektor $(-b-c|a+b|a)$ von A nach C ist ein Vielfaches des Richtungsvektors $(-b|a|c)$ von A nach B. Wie man den jeweils letzten Einträgen ansieht, ist der benötigte Faktor gerade $\frac{a}{c}$. Es folgen die beiden Gleichungen

$$\frac{a}{c} \cdot a = a + b \quad \text{und} \quad \frac{a}{c} \cdot (-b) = -b - c.$$

Es folgt aus der ersten Gleichung $c = \frac{a^2}{a+b}$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich

$$(1 + \frac{b}{a})b = b + \frac{a^2}{a+b}.$$

Hier kann man den Summanden b rechts und links kürzen und erhält nach Teilen durch b und Bilden des Kehrwertes

$$x = \frac{ab + b^2}{a^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Multiplikation mit x^2 zieht dann wie behauptet

$$x^3 = x + 1$$

nach sich.