Aufgabe S 1 (4 Punkte)

Bei einer Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ist $a_1 = 7^2 = 49$. Für das nächste Glied der Folge nimmt man die Quersumme der Zahl, addiert 1 und quadriert diese Zahl, also

$$a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 14^2 = 196$$
$$a_3 = (1 + 9 + 6 + 1)^2 = 17^2 = 289 \quad \text{usw.}$$

Bestimmen Sie a_{2018}.

Lösung: Die Werte $a_1 = 49$, $a_2 = 196$, $a_3 = 289$ sind bekannt. Daraus ergibt sich

$$a_4 = 20^2 = 400,\ a_5 = 5^2 = 25,\ a_6 = 8^2 = 64,\ a_7 = 11^2 = 121,\ a_8 = 5^2 = 25.$$

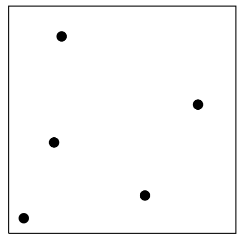
Daran sieht man, dass die Folge ab dem fünften Folgenglied periodisch wird mit Periode 3.

Wegen $2018 = 5 + 2013 = 5 + 3 \cdot 671$ ist

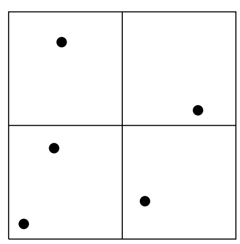
$$a_{2018} = a_5 = 25.$$

Aufgabe S 2 (4 Punkte)

Im Inneren eines Quadrates der Seitenlänge 2 werden zufällig fünf Punkte ausgewählt und ihre Abstände gemessen. Zeigen Sie, dass mindestens zwei Punkte einen Abstand kleiner $\sqrt{2}$ haben.



Lösung: Das große Quadrat wird durch die Mittelsenkrechten der Seiten in vier kleinere Quadrate mit Kantenlänge 1 zerlegt. Von den fünf Punkten müssen mindestens zwei in einem der kleineren Quadrate liegen. Da nicht beide ein Eckpunkt des kleineren Quadrats sein können – es sind ja innere Punkte im großen Quadrat – ist ihr Abstand kleiner als die Diagonallänge des kleinen Quadrats, also kleiner als $\sqrt{2}$.



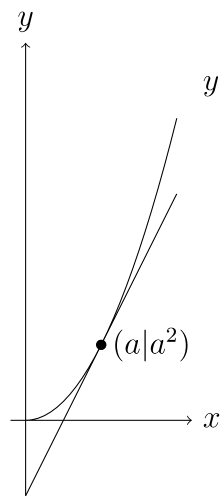
Aufgabe S 3 (4 Punkte)

Aus einer Gruppe von drei Männern und zwei Frauen werden drei Personen zufällig für einen Ausschuss ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Frauen in dem Ausschuss sind?

Lösung: Von den $\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten, das Gremium zu besetzen, sind in genau 3 Fällen beide Frauen mit dabei. Die Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{3}{10}$.

Aufgabe S 4 (4 Punkte)

Berechnen Sie in Abhängigkeit von der positiven Zahl a die Fläche, die von der Parabel $y = x^2$, der x-Achse und der Tangente im Punkt $(a|a^2)$ an die Parabel begrenzt wird.



Lösung: Die Fläche unter der Parabel bis zur x-Achse ist $\frac{1}{3}a^3$.

Die Steigung der Tangente an die Parabel im Punkt $(a|a^2)$ ist $2a$, und daher schneidet sie die x-Achse im Punkt $(\frac{a}{2}|0)$.

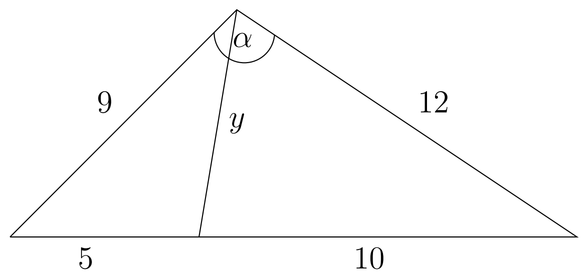
Das Dreieck, das von dem Flächenstück unter der Parabel entfernt wird, hat also Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a^2$.

Der Inhalt der verbleibenden Fläche ist demnach

$$\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^3 = \frac{1}{12}a^3.$$

Aufgabe S 5 (4 Punkte)

Gegeben ist das abgebildete Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen.



a) Bestimmen Sie den Winkel α.

b) Bestimmen Sie die Länge von y.

Lösung:

a) Die Seitenlängen des Dreiecks sind 9, 12 und 15. Wegen

$$15^2 = 225 = 144 + 81 = 12^2 + 9^2$$

handelt es sich um ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 90°$.

b) Fällt man vom unteren Endpunkt von y das Lot auf die linke Dreiecksseite, so entsteht ein kleineres rechtwinkliges Dreieck, das zum Ausgangsdreieck ähnlich ist. Wie die Hypotenuse zeigt, entsteht es aus diesem durch Streckung mit dem Faktor $\frac{5}{15}$. Die kürzere Kathete hat also Länge $\frac{1}{3} \cdot 9 = 3$, und die andere hat Länge 4.

Die Strecke y ist somit Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten der Länge 4 und $9 - 3 = 6$, hat also Länge

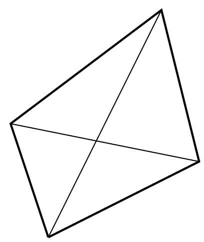
$$\sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}.$$

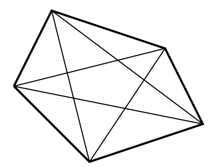
Aufgabe S 6 (4 Punkte)

Ein Viereck hat 2 Diagonalen, ein Fünfeck 5 und ein Sechseck 9. Allgemein bezeichne $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck, also $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ und $d(6) = 9$.

a) Was ist $d(9)$?

b) Für welches n ist $d(n) = 104$?





Lösung: Fügt man einem n-Eck eine neue Ecke hinzu, so ist diese im neuen $(n+1)$-Eck an $n-2$ Diagonalen beteiligt und zusätzlich wird eine der alten Kanten zu einer Diagonalen. Es ist also $d(n+1) = d(n) + n - 1$.

a) Es folgt $d(9) = d(8) + 7 = d(7) + 6 + 7 = d(6) + 5 + 6 + 7 = 9 + 18 = 27$.

b) Es ist
$$104 - 27 = 77 = 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14,$$
also $d(16) = d(9) + 77 = 104$, d. h.
$$n = 16.$$

Aufgabe S 7 (4 Punkte)

Ein Korb mit Nüssen wird folgendermaßen unter vier Personen aufgeteilt:

Der Erste erhält zwei Drittel der Nüsse und noch eine dazu.

Der Zweite erhält von den verbliebenen Nüssen die Hälfte und noch eine dazu.

Der Dritte erhält von den verbliebenen Nüssen ebenfalls die Hälfte und auch noch eine dazu.

Der Letzte erhält von den restlichen Nüssen die Hälfte und noch drei Nüsse dazu.

Damit ist der Korb leer.

Wie viele Nüsse waren am Anfang im Korb?

Lösung: Bevor der Letzte seinen Anteil erhält, sind noch 6 Nüsse vorhanden, beim Vorletzten $2 \cdot (6+1) = 14$, beim Zweiten $2 \cdot (14+1) = 30$ und daher am Anfang $3 \cdot (30+1) = 93$.

Aufgabe S 8 (4 Punkte)

Bei einem Quadrat $ABCD$ im Koordinatensystem ist A der Punkt $(2|5)$, B liegt auf der y-Achse und C auf der x-Achse. Berechnen Sie die Fläche des Quadrats.

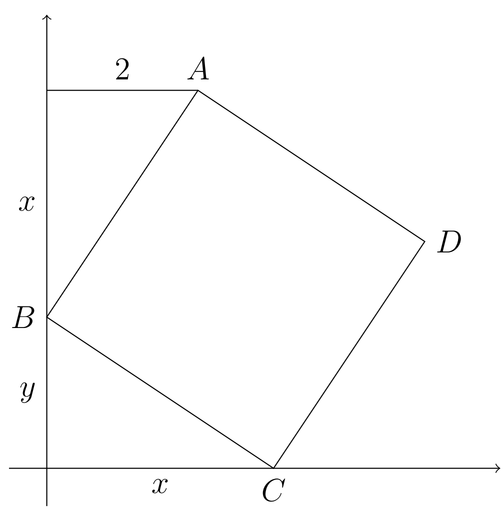
Lösung: Es seien $(0|y)$ und $(x|0)$ die Eckpunkte des Quadrates auf der y- bzw. x-Achse. Dann folgt aus Kongruenzüberlegungen

$$y + x = 5, \ y = 2.$$

Es ergibt sich $x = 3$ und damit ist die Länge einer Seite

$$\sqrt{2^2 + 3^2},$$

der Flächeninhalt ist 13.



Anmerkung: Bezeichnet man die Eckpunkte des Quadrats (entgegen der Konvention) *im* Uhrzeigersinn mit $ABCD$, so erhält man $y = -2$, $x = -7$ und den Flächeninhalt 53.

Aufgabe S 9 (4 Punkte)

Für welche zweistellige Zahl ist die Differenz zwischen der Zahl und dem Quadrat ihrer Quersumme am größten?

Lösung: Man überzeugt sich zunächst davon, dass die Einerstelle der gesuchten Zahl 0 sein muss. Von den verbleibenden neun Möglichkeiten liefert

$$50$$

das gewünschte Ergebnis.

Anmerkung: Da aus der Aufgabenstellung nicht eindeutig hervorgeht, dass der Minuend die zweistellige Zahl und der Subtrahend das Quadrat der Quersumme sein soll, wurde auch die Lösung

$$99$$

akzeptiert, die den Absolutbetrag der Differenz maximiert.