

DAS JONESPOLYNOM

1. EINLEITUNG

Ein zentrales Problem in der Knotentheorie ist die Suche nach möglichst guten Knoteninvarianten, d.h. möglichst einfach zu berechnenden mathematischen Objekten, die möglichst viele Knoten unterscheiden können. Das Ziel wäre eine brauchbare *klassifizierende* Invariante, also eine, die für unterschiedliche Knoten unterschiedliche Werte liefert, und dennoch gut handhabbar ist. Bisher konnte noch keine solche gefunden werden.

Im Kurs haben wir zunächst die Färbbarkeit von Knoten als Invariante kennengelernt und diese zur Etikettierbarkeit modulo p verallgemeinert. Das Geschlecht eines Knotens, das wir im Zusammenhang mit Seifertflächen kennengelernt haben, ist natürlich ebenfalls eine Invariante, allerdings ist es erstens nicht immer einfach auszurechnen, und zweitens unterscheidet es die Knoten nur sehr grob: So gibt es z.B. unter den 84 Primknoten mit 9 oder weniger Überkreuzungen 39 Stück mit Geschlecht $g = 2$.

Mit etwas mehr Topologie, als wir im Kurs gelernt haben (nämlich mit sogenannter Homologietheorie), konnte der amerikanische Mathematiker J. W. ALEXANDER im Jahre 1928 sein berühmtes Alexanderpolynom definieren. Jedem Knoten wird also ein Polynom zugeordnet. So hat etwa der Kleeblattknoten 3_1 das Alexanderpolynom $\Delta(t) = t^2 - t + 1$. Diese Invariante ist immerhin so gut, dass ALEXANDER damit eine vollständige und korrekte Tabelle der Primknoten bis 9 Überkreuzungen angeben konnte. Das Alexanderpolynom kann aber beispielsweise nie einen Knoten von seinem Spiegelbild unterscheiden. Dennoch blieb es für einige Zeit die leistungsfähigste Knoteninvariante.

Im Jahre 1969 kam wieder Bewegung in die Sache, als J. H. CONWAY eine einfachere Herleitung des Alexanderpolynoms fand und damit die 811 Primknoten mit 11 oder weniger Kreuzungen tabellieren konnte. Der nächste große Schritt passierte 1984, als der Neuseeländer V. F. R. JONES bei Forschungen in einem Gebiet der Mathematik, das bis dahin keine Verbindungen zur Knotentheorie hatte, auf eine neue Polynomvariante für Knoten stieß: das Jonespolynom. Kurz darauf fand L. H. KAUFFMAN eine Beschreibung des Jonespolynoms, die sehr viel elementarer ist und CONWAYS Ideen für das Alexanderpolynom aufgreift.

2. DAS KLAMMERPOLYNOM

Wir versuchen nun, eine Polynomvariante zu konstruieren. Ergebnis wird KAUFFMANS sogenanntes Klammerpolynom sein. Wenn K eine Knotenprojektion ist, soll ihr Klammerpolynom mit $\langle K \rangle$ bezeichnet werden. Die Idee ist, nacheinander die Kreuzungen des Knotens aufzulösen und damit das Polynom für den ganzen Knoten auf die Polynome der entstehenden einfacheren Knoten zurückzuführen. Eine Kreuzung kann man auf zweierlei Arten auflösen:

$$\times \xrightarrow{A} \succ \quad \text{und} \quad \times \xrightarrow{B} \rangle \langle$$

Den ersten Typ nennen wir eine A-Auflösung, den zweiten eine B-Auflösung. Löst man einen Knoten dementsprechend auf, verändert er sich natürlich. Man kann sogar etwas erhalten, das aus mehreren Teilen besteht. Wir definieren das Klammerpolynom also gleich für diesen Typ von Objekten:

Definition: Eine Verschlingung ist die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Knoten.

Das Klammerpolynom soll den folgenden Regeln genügen:

- (1) $\langle \bigcirc \rangle = 1$
- (2) $\langle \times \rangle = A \langle \succ \rangle + B \langle \rangle \langle$
- (3) $\langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle + B \langle \succ \rangle$
- (4) $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = C \langle L \rangle$

Die erste Regel besagt, dass die Standardprojektion des Unknotens das Klammerpolynom 1 bekommen soll. Die zweite und dritte Regel beschreiben das Klammerpolynom einer Verschlingung als die Summe der Polynome der Verschlingungen, in denen eine Kreuzung aufgelöst wurde, jeweils mit Vorfaktoren A und B . Man beachte dabei, dass die eine Regel aus der anderen hervorgeht, wenn man sie um 90 Grad dreht. Die vierte Regel besagt, dass sich das Polynom um den Faktor C ändern soll, wenn man einen Unknoten hinzufügt. Das Symbol \sqcup steht dabei für eine unverschlungene Vereinigung, genauer: Der hinzugefügte Unknoten muss sich vom Rest der Verschlingung durch eine Sphäre trennen lassen.

Um daraus eine Knoteninvariante zu machen, benutzen wir den Satz von Reidemeister: Wir schauen uns an, was unter Anwendung von Reidemeister-Bewegungen mit dem Klammerpolynom passiert, und versuchen dann, die Variablen A, B, C so in Beziehung zu setzen, dass das Polynom invariant unter den Bewegungen bleibt. Was passiert, wenn man die zweite Reidemeisterbewegung Ω_2 an einer Stelle im Diagramm anwendet?

$$\begin{aligned}
\langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{Y} \rangle + B \langle \text{Z} \rangle \\
&= A (A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle) + B (A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle) \\
&= A (A \langle \text{X} \rangle + BC \langle \text{X} \rangle) + B (A \langle \text{X} \rangle + B \langle \text{X} \rangle) \\
&= (A^2 + ABC + B^2) \langle \text{X} \rangle + BA \langle \text{X} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{X} \rangle
\end{aligned}$$

Um Invarianz unter Ω_2 zu erreichen, muss das letzte Gleichheitszeichen erfüllt sein, also muss gelten $A^2 + ABC + B^2 = 0$ sowie $AB = 1$. Das führt auf

$$B = A^{-1} \quad \text{und} \quad C = -A^2 - A^{-2}$$

Die obigen Regeln lauten also mit dem Ergebnis dieser Rechnung:

- (1) $\langle \bigcirc \rangle = 1$
- (2) $\langle \times \rangle = A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{Y} \rangle$
- (3) $\langle \times \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle$
- (4) $\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle$

Bei der Betrachtung von Ω_3 wählen wir bereits B und C entsprechend obiger Gleichungen und können somit die Invarianz unter Ω_2 schon ausnutzen:

$$\begin{aligned}
\langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{Y} \rangle \\
&= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{Y} \rangle = \langle \text{X} \rangle
\end{aligned}$$

Das Klammerpolynom in dieser Form ist also auch unter Ω_3 invariant. Betrachten wir nun eine Anwendung von Ω_1 :

$$\begin{aligned}
\langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{Y} \rangle \\
&= A (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{X} \rangle + A^{-1} \langle \text{Y} \rangle \\
&= -A^3 \langle \text{X} \rangle \\
\langle \text{Y} \rangle &= A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{X} \rangle \\
&= A \langle \text{X} \rangle + A^{-1} (-A^2 - A^{-2}) \langle \text{X} \rangle \\
&= -A^{-3} \langle \text{X} \rangle
\end{aligned}$$

Je nachdem, ob wir die Bewegung in die eine oder in die andere Richtung ausführen, bekommen wir einen Faktor $-A^{\pm 3}$. Was nun? Wir können nun wieder versuchen, $-A^{\pm 3} = 1$ zu setzen. Wenn wir $A = -1$, oder mit Kenntnis von komplexen Zahlen etwas schlauer $A = e^{\frac{\pi i}{3}}$ setzen, ist diese Gleichung offensichtlich erfüllt, und wir erhalten eine Knoteninvariante. Wir würden damit die letzte verbliebene Variable A allerdings auch noch beseitigen, wobei die gefundene Invariante allerdings erstens den Namen Polynom nicht mehr verdienen würde und zweitens nicht sehr leistungsfähig wäre. Wir suchen also nach einer Möglichkeit, die Polynom-invariante zu retten.

3. DIE WINDUNGSZAHL

Wir orientieren das gegebene Knotendiagramm K – für welche der beiden möglichen Orientierungen wir uns entscheiden, spielt dabei keine Rolle. Dadurch entstehen zwei Typen von Kreuzungen: die positiven vom Typ \nearrow und die negativen vom Typ \nwarrow . Bei den positiven Kreuzungen läuft der unterkreuzende Faden von rechts nach links unter dem überkreuzenden durch, wenn man in die Orientierungsrichtung des überkreuzenden schaut, bei negativen Kreuzungen von links nach rechts. Nun markieren wir jede positive Kreuzung mit $+1$ und jede negative Kreuzung mit -1 . Die Summe der Markierungen ergibt die Windungszahl $w(K)$:

$$w(K) = \#(\text{positive Kreuzungen}) - \#(\text{negative Kreuzungen})$$

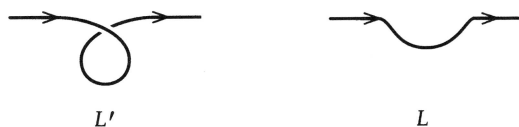
Man überzeuge sich davon, dass ein Orientierungswechsel auf einem Knotendiagramm tatsächlich die Windungszahl nicht ändert. Bei einer Verschlingung kann sie sich jedoch verändern, wenn man die Orientierung einer Komponente ändert.

4. DAS JONESPOLYNOM

Es sei L ein Diagramm einer orientierten Verschlingung, $w(L)$ seine Windungszahl, $\langle L \rangle$ sein Klammerpolynom. Dann definieren wir zunächst das von KAUFFMAN so bezeichnete X -Polynom durch:

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle$$

Die Windungszahl ist wie das Klammerpolynom invariant unter den Reidemeisterbewegungen Ω_2 und Ω_3 (!), also auch das X -Polynom. Wir betrachten also, was bei Ω_1 passiert. Sei dazu L' das Diagramm, das aus L durch Ausführen einer Ω_1 -Bewegung wie folgt hervorgeht:



Die Windungszahl wird hierbei um eins größer. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(w(L)+1)} \langle L' \rangle \\ &= (-A^3)^{-(w(L)+1)} (-A^3 \langle L \rangle) \\ &= (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle \\ &= X(L) \end{aligned}$$

Somit ist das X -Polynom auch unter Ω_1 invariant, also insgesamt eine Invariante für orientierte Verschlingungen, die für Knoten sogar von der

Orientierung unabhängig ist. Es stimmt schon fast mit der von JONES gefundenen Version überein. Zwischen dem Jonespolynom V und dem X -Polynom eines Knotens K besteht die folgende Beziehung:

$$V(K)(t) = X(K)(t^{-\frac{1}{4}})$$

Für jedes Auftreten von A im X -Polynom wird also $t^{-\frac{1}{4}}$ eingesetzt, um das ursprüngliche Jonespolynom zu erhalten.

5. JONESPOLYNOM UND SPIEGELUNGEN

Es sei L eine orientierte Verschlingung. Wir spiegeln sie an einer Ebene und bezeichnen das Spiegelbild mit L^s . Man erhält das Spiegelbild zum Beispiel, indem man in einem Diagramm von L alle Kreuzungen abändert, also \times durch \times ersetzt. Wie ändert sich dabei das Klammerpolynom? Bei den Regeln 2 und 3 wird jeweils A zu A^{-1} . An den Regeln 1 und 4, in denen keine Kreuzungen vorkommen, ändert sich nichts, aber man kann sich trotzdem vorstellen, dass A durch A^{-1} ersetzt wird¹. Insgesamt gilt also (wenn jetzt L bzw. L^s feste Diagramme bezeichnen):

$$\langle L^s \rangle(A) = \langle L \rangle(A^{-1})$$

Das Spiegeln vertauscht positive und negative Kreuzungen, also gilt für die Windungszahl:

$$w(L^s) = -w(L)$$

Auch im Windungszahl-Anteil des X -Polynoms wird beim Spiegeln also A durch A^{-1} ersetzt. Demnach gilt auch für das X - bzw. Jonespolynom:

$$X(L^s)(A) = X(L)(A^{-1}) \quad \text{bzw.} \quad V(L^s)(t) = V(L)(t^{-1})$$

Für den rechts- und linkshändigen Kleeblattknoten gelten beispielsweise:

$$V(\textcircled{\otimes}) = -t^4 + t^3 + t \quad \text{und} \quad V(\textcircled{\ominus}) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

Dies beweist also, dass ein Kleeblattknoten verschieden von seinem Spiegelbild ist. Einige Knoten sind dagegen amphichiral, d.h. äquivalent zu ihrem Spiegelbild. Die kleinsten Beispiele hierfür sind 4_1 und 6_3 . Ihre Jonespolynome müssen *palindromisch* sein, also gleich bleiben, wenn man das Vorzeichen der Exponenten ändert. So gilt beispielsweise

$$V(4_1) = t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}$$

Ist das Jonespolynom eines Knotens nicht palindromisch, so kann der Knoten also nicht amphichiral sein. Die Umkehrung gilt dagegen nicht: Zum Beispiel hat der 9_{42} das Jonespolynom $t^3 - t^2 + t - 1 + t^{-1} - t^{-2} + t^{-3}$, ist aber von seinem Spiegelbild verschieden.

¹Weil die Ausdrücke 1 und $-A^2 - A^{-2}$ gleich bleiben, wenn man A durch A^{-1} ersetzt.



ABBILDUNG 1. Die rechtshändige Version des 9_{42}

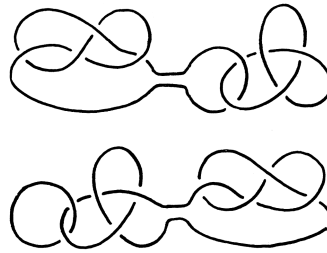


ABBILDUNG 2. Zwei Verschlingungen mit gleichem Jonespolynom

6. WEITERE EIGENSCHAFTEN

Zunächst einmal kann man sich Eigenschaften des Polynoms als Funktion anschauen. Man erhält zum Beispiel für jede Verschlingung L :

$$V(L)(1) = (-2)^{p-1}$$

Dabei ist p die Anzahl der Komponenten von L . Insbesondere erhält man für jeden Knoten K die Gleichung $V(K)(1) = 1$. Weiterhin gelten für das Jonespolynom von Knoten

$$V(K)(e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 1 \quad \text{und} \quad V'(K)(1) = 0$$

Für die Summe $\#$ und die unverschlungene Vereinigung \sqcup lässt sich das Jonespolynom leicht berechnen: Seien L_1 und L_2 Verschlingungen, dann gelten:

$$V(L_1 \# L_2) = V(L_1)V(L_2) \quad \text{und}$$

$$V(L_1 \sqcup L_2) = -\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V(L_1)V(L_2)$$

Man beachte dabei, dass die Summe von zwei Verschlingungen im Allgemeinen nicht wohldefiniert ist: Indem man unterschiedliche Komponenten zum Verbinden aussucht, kann man unterschiedliche Summen erhalten. Das Jonespolynom merkt davon allerdings nichts. Die Abbildung 2 zeigt zwei verschiedene Verschlingungen, die beide das gleiche Jonespolynom haben.

7. FLECHTRELATIONEN

Mit etwas Nachdenken sieht man ein, dass man das Jonespolynom auch wie folgt eindeutig charakterisieren kann:

- (1) V ist eine Knoteninvariante
- (2) $V(\bigcirc) = 1$
- (3) $t^{-1}V(\text{↗}) - tV(\text{↘}) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})V(\text{↖})$

Die dritte Regel nennt man eine *Flechtrelation* (engl. skein relation). Ersetzt man sie durch eine andere, kann man manchmal neue Knoteninvarianten gewinnen. Bereits 1969 war es CONWAY gelungen, das Alexanderpolynom $\Delta(t)$ auf diese Art und Weise zu charakterisieren:

$$\Delta(\text{↗}) - \Delta(\text{↘}) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\Delta(\text{↖})$$

Die Entdeckung des Jonespolynomes führte zu einer ganzen Welle neuer Knotenpolynome, die sich mit Hilfe einer Flechtrelation beschreiben lassen. Das leistungsfähigste Polynom aus dieser Klasse von Invarianten ist das HOMFLY-Polynom $\mathcal{P}(\alpha, z)$, ein Polynom in zwei Variablen, das durch die folgende Flechtrelation beschrieben wird:

$$\alpha^{-1}\mathcal{P}(\text{↗}) - \alpha\mathcal{P}(\text{↘}) = z\mathcal{P}(\text{↖})$$

Man kann es als eine gemeinsame Verallgemeinerung von Jones- und Alexanderpolynom sehen: Das Alexanderpolynom erhält man aus dem HOMFLY-Polynom, indem man $\alpha = 1$ und $z = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ setzt:

$$\Delta(K)(t) = \mathcal{P}(K)\left(1, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

Dementsprechend erhält man das Jonespolynom aus dem HOMFLY-Polynom mit $\alpha = t$ und $z = \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$, also gilt:

$$V(K)(t) = \mathcal{P}(K)\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Der lustige Name des HOMFLY-Polynoms setzt sich aus den Anfangsbuchstaben seiner Entdecker zusammen: HOSTE, OCNEANU, MILLETT, FREYD, LICKORISH und YETTER. Manch einer ist gar der Meinung, man müsse auch PRZTYCKI und TRACZYK, die das Polynom unabhängig von den anderen sechs entdeckten, sowie mögliche unbekannte Entdecker berücksichtigen, und nennt die Invariante dann LYMPHTOFU-Polynom.