Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Dipl.-Math. André Kappes
Dipl.-Math. Florian Nisbach

23. Juli 2007

Lösungen zum Knotentheorie-Schnupperkurs – Blatt 4

Aufgabe 1:

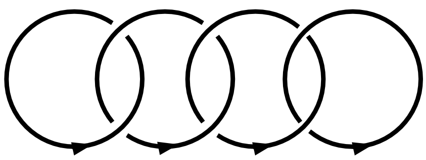
a) Berechne das Jones-Polynom des rechtshändigen Kleeblattknotens und vergleiche es mit dem Jones-Polynom des linkshändigen Kleeblattknoten. Was fällt Dir auf?

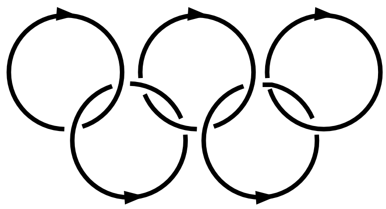
b) Welchen Zusammenhang würdest Du allgemein zwischen dem Jones-Polynom eines Knotens und dem Jones-Polynom seines Spiegelbilds vermuten? Kannst Du diese Vermutung beweisen? (Was heißt "Spiegeln" für ein Knotendiagramm? Wie wirkt sich das auf die Berechnung des Klammerpolynoms aus?)

c) Wenn ein Knoten zu seinem Spiegelbild äquivalent ist, wie sieht dann sein Jones-Polynom aus?

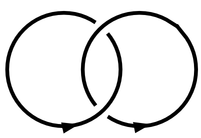
Lösung: siehe die Zusammenfassung über das Jones-Polynom.

Aufgabe 2: Man kann das Jones-Polynom auch für Verschlingungen berechnen. Allerdings ist dies nur dann sinnvoll, wenn man für jede Komponente der Verschlingung vorher eine Orientierung wählt. Berechne das Jones-Polynom folgender berühmter Verschlingungen.





Lösung: *Die Audi-Verschlingung*
Um die Audi-Verschlingung zu berechnen, gehen wir am besten schrittweise vor und betrachten zuerst eine Verschlingung, die nur aus zwei Ringen besteht. Sei H also die Verschlingung



Diese heißt manchmal auch Hopf-Verschlingung nach dem Mathematiker Heinz Hopf.

Das Klammerpolynom von H ist

$$\langle H\rangle = -A^4 - A^{-4}.$$

Man berechnet es, in dem man z.B. die obere Kreuzung auflöst. Tut man dies, so erhält man die Summe zweier Klammerpolynome des Unknotens mit den jeweiligen Vorfaktoren A und $-A$. Die Windungszahl des zum Faktor A gehörenden Knotendiagramms ist $+1$, die des zum Faktor $-A$ gehörenden ist -1. Ersetzt man die Knotendiagramme des Unknotens jetzt mithilfe der Formel

$$\langle \text{Unknoten}\rangle = (-A^3)^{w(\text{Unknoten})},$$

so ergibt sich das obige Klammerpolynom. Um das X-Polynom zu erhalten, berechnen wir die Windungszahl: mit der im Bild gewählten Orientierung gilt $w(H) = -2$. Damit ergibt sich als X-Polynom

$$\begin{aligned} X(H) &= (-A^3)^{-w(H)}\langle H\rangle \\ &= (-A^3)^2(-A^4 - A^{-4}) = -A^{10} - A^2 \end{aligned}$$

Nun berechnen wir das Klammerpolynom für die Verschlingung H_3 aus drei Schlingen wie in Abbildung 1 und versuchen, dass was wir schon über die Hopf-Verschlingung wissen, einfließen zu lassen.

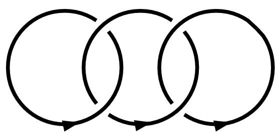


Abbildung 1: Die Verschlingung H_3

Deshalb lösen wir z.B. die Kreuzung rechts oben mit der Regel (2) auf. Dann erhalten wir zweimal eine Hopf-Verschlingung, allerdings haben die Knotendiagramme noch einen zusätzlichen Twist. Wir lösen also diesen Twist wieder mit Regel (2) auf und wenden dann Regel (4) an, um den entstandenen Unknoten $\bigcirc$ zu entfernen. Damit ergibt sich als Klammerpolynom

$$\begin{aligned} \langle H_3\rangle &= A(A(-A^2 - A^{-2})\langle H\rangle) + A^{-1}\langle H\rangle + \\ &\quad + A^{-1}(A\langle H\rangle + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})\langle H\rangle) \\ &= (-A^4 - A^{-4})\langle H\rangle \\ &= (-A^4 - A^{-4})^2 = (\langle H\rangle)^2 \end{aligned}$$

Das Klammerpolynom der Verschlingung H_3 ist also das Quadrat des Klammerpolynoms der Hopf-Verschlingung. Das ist auch nicht verwunderlich, wenn man sich überlegt, dass H_3 die Knotensumme von zwei Hopf-Verschlingungen ist.
Mit diesen Überlegungen wissen wir also, dass das Klammerpolynom der Audi-Verschlingung

$$\langle \text{Audi}\rangle = (\langle H\rangle)^3$$

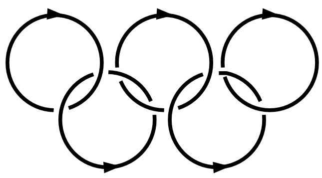
lautet. Ihre Windungszahl ist – mit der angegebenen Orientierung berechnet – $w(\text{Audi}) = -6$. Also lautet ihr X-Polynom

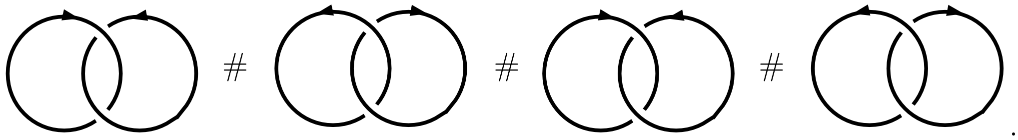
$$\begin{aligned} X(\text{Audi}) &= (-A^3)^{-w(\text{Audi})}\langle \text{Audi} \rangle \\ &= (-A^3)^{2\cdot 3}(-A^4 - A^{-4})^3 \\ &= (-A^{10} - A^2)^3. \end{aligned}$$

Das Jones-Polynom schließlich erhält man durch Ersetzen von A durch $t^{-1/4}$:

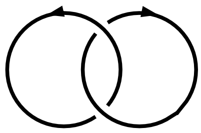
$$J(\text{Audi}) = (-t^{-5/2} - t^{-1/2})^3.$$

Die Olympia-Verschlingung
Genau wie die Audi-Verschlingung kann man die Olympia-Verschlingung auch in eine Knotensumme von Hopf-Verschlingungen zerlegen. Wenn man genau hinsieht, ist nämlich

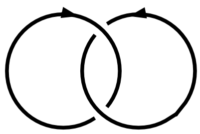
 =



Die beteiligten Hopf-Verschlingungen sind, wenn man die Orientierung außer Acht lässt, alle gleich und die Spiegelbilder der oben bei der Audi-Verschlingung betrachteten Verschlingung H. Wir schauen uns die Verschlingung



näher an. Diese ist zu H äquivalent! (Man "flippt" einen der beiden Kreise und erhält H). Also hat sie dasselbe X-Polynom wie H. Es gilt sogar, dass das Klammerpolynom dasselbe ist: Beim Flippen entstehen zwar zwei Ohren, für deren Entfernung man eine Ω_1-Bewegung braucht, aber diese beiden Ohren sind in verschiedenen Richtungen reingedreht, weshalb sich an der Windungszahl beim Herausdrehen nichts ändert.
Bei der anderen Verschlingung $\bar{H}$



sind die Orientierungen vertauscht, was das Vorzeichen der Windungszahl ändert. Also gilt $w(\bar{H}) = -w(H) = 2$ und damit

$$X(\bar{H}) = (-A^3)^{-w(\bar{H})}\langle \bar{H} \rangle = (-A^3)^2 \langle H \rangle = -A^{-10} - A^{-2}$$

Also folgt mit der Multiplikativität des X-Polynoms,

$$\begin{aligned} X(\text{Olympia}) &= X(\bar{H}\#H\#\bar{H}\#H) \\ &= X(\bar{H}) \cdot X(H) \cdot X(\bar{H}) \cdot X(H) \\ &= X(\bar{H})^2 \cdot X(H)^2 \\ &= (-A^{-10} - A^{-2})^2 \cdot (-A^{10} - A^2)^2 \end{aligned}$$

Das Jones-Polynom der Olympischen Verschlingung ist deshalb

$$J(t) = (-t^{5/2} - t^{1/2})^2 \cdot (-t^{-5/2} - t^{-1/2})^2.$$