DER PRIMZERLEGUNGSSATZ

FLORIAN NISBACH

1. Der Satz

Ein Primknoten ist ein Knoten K, der sich nicht mehr durch Aufspalten in nichttriviale Summanden $K = K_1 \# K_2$ vereinfachen lässt. Genauer: Gibt es eine Sphäre, die von K nur an zwei Punkten durchstoßen wird, dann ist der innere oder der äußere Teil der Unknoten. Die Tatsache, dass jeder Knoten eine Summenzerlegung in Primknoten besitzt, war durch die von H. Seifert eingeführten Techniken *Seifertflächen* und *Knotengeschlecht* in den 1930er Jahren bekannt. Der Beweis der Eindeutigkeit wurde im Jahre 1949 von Seiferts Schüler H. Schubert in seiner Doktorarbeit [1] publiziert. Wir formulieren zunächst den Satz:

Satz: (Schubert, 1949) Jeder nichttriviale Knoten K besitzt eine Zerlegung

$$K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$$

mit Primknoten $K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$. Diese Zerlegung ist bis auf Vertauschung der Reihenfolge eindeutig.

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile: Es muss die Existenz einer solchen Zerlegung und ihre Eindeutigkeit gezeigt werden.

2. Beweis der Existenz

Zunächst benötigen wir die folgende, im Kurs gezeigte Aussage:

Proposition: a) Jeder Knoten K besitzt ein eindeutig bestimmtes Geschlecht $g(K)$. Dieses ist eine nichtnegative, ganze Zahl.
b) Gilt $g(K) = 0$, so ist K der Unknoten.
c) Sind K_1, K_2 Knoten, so gilt $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$.

Damit können wir den Beweis durch Induktion über $g(K)$ führen:
Induktionsanfang: $g(K) = 1$. Aus der Proposition folgt dann schon, dass K ein Primknoten ist.
Induktionsschritt: $g = g(K) > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist K ein Primknoten, dann ist $n = 1$, und K ist seine eigene Primzerlegung. In diesem Fall ist nichts mehr zu zeigen. Ist K nicht prim, dann gibt es nach Definition eine Zerlegung

$$K = L \# M$$

sodass L und M keine Unknoten sind. Sei $g' = g(L), g'' = g(M)$, dann gilt $g = g' + g''$. Da keiner der Summanden der Unknoten ist, gilt $g' > 0, g'' > 0$, also $g' < g, g'' < g$. Wir können also auf L und M die Induktionsvoraussetzung anwenden und Primzerlegungen finden: $L = L_1 \# \dots \# L_l$, $M = M_1 \# \dots \# M_m$, und aufgrund der Assoziazivität der Knotensumme gilt:

$$K = L_1 \# \dots \# L_l \# M_1 \# \dots \# M_m$$

Wir haben also für K eine Primzerlegung gefunden.

3. Beweis der Eindeutigkeit

Wir haben nun also die Existenz von Primzerlegungen für alle Knoten sichergestellt. Zum Beweis der Eindeutigkeit ist folgendes zu zeigen: Sind K und L äquivalente Knoten, die Primzerlegungen $K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n$ und $L = L_1 \# L_2 \# \dots \# L_m$ besitzen, dann gelten:

(1) $n = m$
(2) es gibt eine Permutation der Menge $\{1, \dots, n\}$, also eine eineindeutige Abbildung

$$\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

sodass gilt: $K_i = L_{\pi(i)}$.

Zum Beweis benötigen wir zunächst eine Definition:

Definition: Es sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten, $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}^3$ Vollkugeln, deren Kugeloberflächen mit $S_1, \dots, S_n$ bezeichnet werden sollen. Es sollen gelten:

(1) $B_1, \dots, B_n$ schneiden sich nicht.
(2) Jede Sphäre (Kugeloberfläche) S_i schneidet aus K einen Primknoten K_i aus.
(3) Der Rest R von K, der nicht in $\bigcup_{i=1}^n B_i$ enthalten ist, besteht aus unverknoteten Bögen.

Dann heißt $(B_1, \dots, B_n)$ ein trennendes System für K.

Wir sollten die Punkte 2 und 3 noch etwas formaler präzisieren: Jede Sphäre wird von K an zwei Punkten durchstoßen. Wähle auf S_i einen Weg w_i, der diese verbindet. Man überzeuge sich davon, dass es egal ist, welche Wege w_i man wählt, da man auf eine Kugeloberfläche keine Knoten malen kann. Dann lauten 2 und 3:

(2) Für jedes i ist $(K \cap B_i) \cup w_i$ ein Primknoten.
(3) $(K \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i) \cup \bigcup_{i=1}^n w_i$ ist ein Unknoten.

Die Abbildung 1 zeigt ein Beispiel für ein solches trennendes System mit eingezeichneten Verbindungswegen w_i. Bevor wir zum Beweis übergehen, machen wir folgende Feststellung: Ein trennendes System $(B_1, \dots, B_n)$ liefert eine Primzerlegung $K = K_1 \# \dots \# K_n$. Außerdem

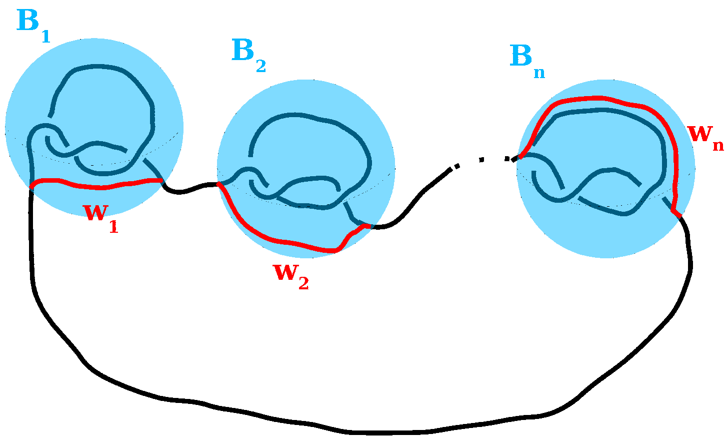

ABBILDUNG 1. Ein trennendes System

gibt es zu jeder Primzerlegung ein trennendes System, das diese realisiert.

Beweis der Eindeutigkeit:

1. Schritt: Sind K und K' äquivalent, dann gibt es einen stückweise linearen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(K) = K'$. Um das zu verstehen, erinnere man sich daran, dass man Knoten eigentlich als stückweise linear, also eckig betrachten soll. Ein Homöomorphismus zwischen Flächen war als eineindeutige Abbildung zwischen den Eckenmengen von Triangulierungen der beiden Flächen definiert, sodass Punkte, die ein Dreieck begrenzen, wieder auf solche Punkte abgebildet werden. Auch den $\mathbb{R}^3$ kann man triangulieren – man benötigt dann aber Tetraeder statt Dreiecke. Der Begriff des Homöomorphismus ist dann wieder ganz ähnlich definiert. Wir wollen die obige Aussage nicht beweisen – aber was nützt sie uns jetzt? Wenn wir ein trennendes System für K wählen, dann können wir die Triangulierung so wählen, dass die Kugeln des Systems jeweils die Vereinigung von Tetraedern einer Triangulierung des $\mathbb{R}^3$ sind. (Dabei sind die Kugeln natürlich auch eckig geworden.) Wenn wir jetzt gemäß obiger Aussage einen Homöomorphismus f festlegen, dann bildet er das trennende System für K auf ein trennendes System für K' ab. (Homöomorphismen können das!) Dieses liefert natürlich immer noch die gleiche Primzerlegung. Wir können uns also auf einen festen Knoten zurückziehen und brauchen Äquivalenz nicht mehr zu betrachten.

2. Schritt: Wir betrachten nun also einen festen Knoten K. Seien $(B_1, \ldots, B_n)$ und $(C_1, \ldots, C_m)$ trennende Systeme für K mit zugehörigen Primzerlegungen $K = K_1 \# \ldots \# K_n$ bzw. $K = L_1 \# \ldots \# L_m$. Sei $j \in \{1, \ldots, m\}$, dann gibt es ein i mit $B_i \cup C_j \neq \emptyset$. (Denn jedes C und jedes B muss einen Primknoten enthalten, und der Rest von K ist ja unverknotet.)

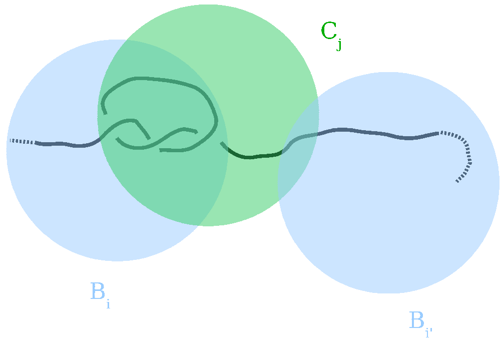

Abbildung 2

3. Schritt: Verschiebe nun das trennende System von B-Kugeln so, dass gilt: Jedes B_i hat mit genau einer Kugel C_j nichtleeren Schnitt. Das können wir machen, ohne die Primzerlegung zu verändern, denn: Jede B-Kugel darf ja nur einen Primknoten enthalten. Deshalb kann sie auch nur mit einer C-Kugel einen Schnitt haben, in dem ein Primknoten sitzt – und die anderen Schnitte kann man durch Verschieben beseitigen. Abbildung 2 zeigt ausschnittsweise die Situation, in die wir uns jetzt begeben haben. Auf jeden Fall haben wir jetzt schon $m \leq n$ gezeigt.

4. Schritt: Es liegt nun nahe, den letzten Schritt auch noch auf das C-System anzuwenden. Aus dem gleichen Grund geht das wieder, ohne die Primzerlegung, die vom C-System herkommt, zu verändern. Wir sind jetzt also in der Situation, dass jede B-Kugel mit genau einer C-Kugel nichtleeren Schnitt hat und umgekehrt. Dies zeigt also zunächst einmal $m = n$. Haben nun aber B_i und C_j nichtleeren Schnitt, dann muss der in B_i enthaltene Primknoten (genauso wie der in C_j enthaltene) schon in $B_i \cap C_j$ liegen. (Man überlege sich im Detail, warum!) Also sind K_i und L_j äquivalent. Auf diese Weise lässt sich also die gesuchte Permutation definieren:

$$\pi(i) = j, \text{ wenn } B_i \cap C_j \neq \emptyset$$

Dies schließt den Beweis ab.

Literatur

[1] H. Schubert *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten* in: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, **3. Abh.** (1949), 57-104