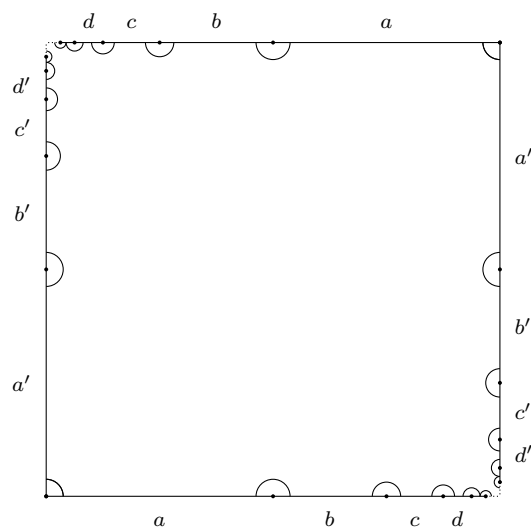


Skript zur Vortragsreihe „Unendliche Translationsflächen“

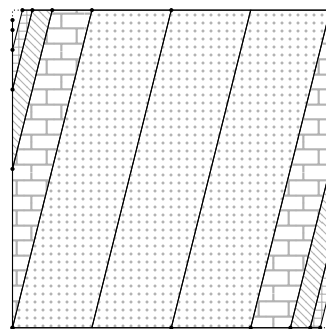
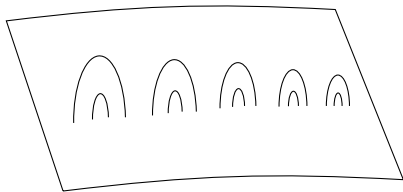
Anja Randecker

Stand: 27. Juli 2017



Homöomorphie

Zylinder-
zerlegung



Dieses Skript entstand parallel zur Vortragsreihe „Unendliche Translationsflächen“ im Wintersemester 2012/13 am KIT (Karlsruher Institut für Technologie).

Die Ziele dieser Vortragsreihe waren:

- Kompetenzziel: Die Hörer sind und fühlen sich nach Besuch der Veranstaltung in der Lage, sich in einen aktuellen Artikel aus dem Bereich der Translationsflächen selbstständig einzuarbeiten.
- Die Hörer können von einem gegebenen Konstrukt entscheiden, ob es sich um eine Translationsfläche bzw. um eine endliche Translationsfläche handelt. Sie können die Arten der vorkommenden Singularitäten unterscheiden und kennen Beispiele für jede Art. Sie kennen Eigenschaften von Veechgruppen und können Methoden zur Bestimmung erläutern.
- Die Hörer können prägnante Beispiele nennen zum unterschiedlichen Stand der Forschung im Bereich der endlichen und der nicht-endlichen Translationsflächen.
- Die Hörer sind neugierig auf aktuelle Fragestellungen, können neue Fragen im Bereich Translationsflächen stellen und haben keine Angst (mehr) vor aktuellen Forschungsartikeln.

Mein Dank geht an alle, die bisher schon in diesem Skript gelesen und Verbesserungen vorgeschlagen haben, also an Gabi, Myriam und Sven, und ganz besonders an die Besucher der Vorträge Ben, Benni, Manuel, Moritz, Moritz, Simon und Sven, die regelmäßig und voller Begeisterung dabei waren.

Natürlich bin ich auch weiterhin offen für Anregungen und Verbesserungen!

Inhaltsverzeichnis

1	Erste Begriffe	4
1.1	Definition Translationsfläche	4
1.2	Endliche Translationsflächen	8
1.3	Beispiele für nicht-endliche Translationsflächen	19
1.4	Sattelverbindungen und Zylinder	21
2	Singularitäten	26
2.1	Raum der linearen Näherungen	26
2.2	Klassifikation von Singularitäten	29
2.3	Beispiele für Singularitäten	32
3	Klassifikation von Flächen	38
3.1	Klassifikation von kompakten Flächen	38
3.2	Klassifikation von nichtkompakten Flächen	43
4	Veechgruppen	49
4.1	Definition Veechgruppe	49
4.2	Fuchssche Gruppen	55
4.3	Veechgruppen endlicher Translationsflächen	58
4.4	Veechgruppen allgemeiner Translationsflächen	61
4.5	Veechgruppen und Drehkomponenten wilder Singularitäten	70
5	Ergodentheorie	73
5.1	Parabolische Elemente und Zylinderzerlegungen	73
5.2	Veech-Dichotomie	78
5.3	Alternative Formulierung und Verallgemeinerungen der Veech-Dichotomie	80
5.4	Anwendung auf das Ehrenfest'sche Wind-und-Bäume-Modell	84

1 Erste Begriffe

Die moderne Theorie der Translationsflächen beginnt eigentlich mit [Vee89]. Allerdings lassen sich aus heutiger Sicht auch sehr viel ältere Artikel in den Bereich der Translationsflächen einordnen, auch wenn dort noch eine ganz andere Ausdrucksweise verwendet wird. In [Vee89] wird die sogenannte Veechgruppe definiert, die bei der Klassifikation von Translationsflächen hilfreich ist. Die Theorie ist aber seitdem in sehr verschiedenen Bereichen (beispielsweise dem der dynamischen Systeme oder der Teichmüllerräume) vorangetrieben worden, über einige davon wollen wir uns in den nächsten Monaten einen Überblick verschaffen. Zuerst werden wir uns allerdings mit einigen Definitionen, insbesondere der Definition des Begriffs Translationsfläche, beschäftigen.

Eine Warnung sei hier noch vorangestellt: Es gibt auch in den Ingenieurwissenschaften bei der Modellierung von Oberflächen den Begriff Translationsfläche. Bei einer Internetrecherche mit deutschen Begriffen sollte man sich davon also nicht irritieren lassen.

1.1 Definition Translationsfläche

Definition 1.1 (Mannigfaltigkeit, Fläche)

- (i) Eine (*n*-dimensionale) *Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorffraum, der eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und in dem jeder Punkt eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n ist.
- (ii) Eine *Fläche* ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Beispiel 1.2 (Mannigfaltigkeiten). (i) Die 1-Sphäre $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ ist eine eindimensionale Mannigfaltigkeit.

- (ii) Die 2-Sphäre, der Torus und die Kleinsche Fläche sind zweidimensionale Mannigfaltigkeiten, also Flächen.

Eine Fläche „verhält“ sich also lokal wie die reelle Ebene \mathbb{R}^2 . Manchmal wollen wir jedoch von \mathbb{C} statt von \mathbb{R}^2 sprechen, beispielsweise um den Begriff einer holomorphen Funktion verwenden zu können. In diesen Fällen benutzen wir immer die kanonische Identifizierung

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + iy.$$

Definition 1.3 (Komplexer Atlas, Riemannsche Fläche)

Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

- (i) Eine *Karte* auf M ist ein Paar (U, φ) , wobei U eine offene Teilmenge von M und $\varphi: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge V von $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist.
- (ii) Ein *komplexer Atlas* von M ist eine Menge von Karten $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$, wobei $\cup_{i \in I} U_i = M$ gelten soll und die Kartenwechselabbildungen (siehe Abbildung 1.1)

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

für alle Karten $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$ biholomorph sind. Die Karten heißen dann *komplexe Karten*.

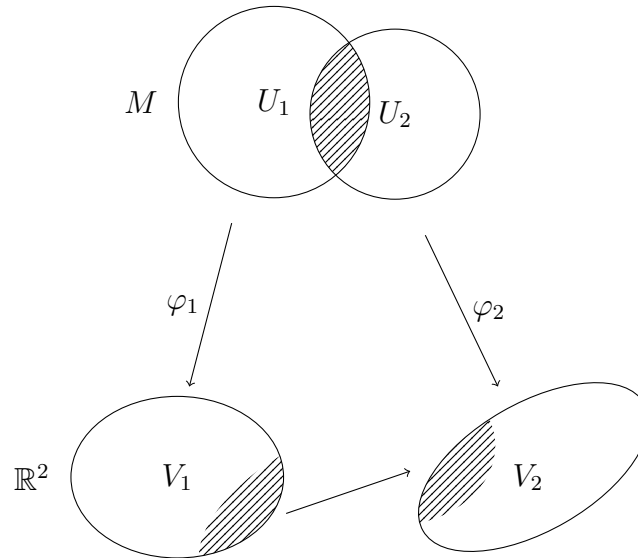


Abbildung 1.1: Kartenwechsel bei Mannigfaltigkeiten

- (iii) Eine *komplexe Struktur* auf M ist die Äquivalenzklasse eines komplexen Atlanten, wobei zwei Atlanten äquivalent sein sollen, wenn es zwischen allen Karten der beiden Atlanten biholomorphe Kartenwechselabbildungen gibt.
- (iv) Eine *Riemannsche Fläche* ist eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit einer komplexen Struktur.

Analog lassen sich andere Atlanten und Strukturen definieren, indem man für die Kartenwechselabbildungen andere oder zusätzliche Eigenschaften wie beispielsweise Differenzierbarkeit fordert. Für uns ist folgende Eigenschaft wichtig:

Definition 1.4 (Translationsstruktur)

Ein *Translationsatlas* ist eine Menge von Translationskarten, das heißt die Kartenwechselabbildungen sind Translationen im \mathbb{R}^2 . Eine *Translationsstruktur* ist die Äquivalenzklasse eines Translationsatlanten.

Bemerkung 1.5 (Strukturen und maximale Atlanten). Stellvertretend für eine Struktur kann jeweils der zugehörige maximale Atlas (also die Vereinigung der Karten aller Atlanten der Äquivalenzklasse) betrachtet werden. Damit macht es auch Sinn, von Karten auf einer Riemannschen Fläche oder einer Translationsfläche zu sprechen.

Wir wollen jetzt die Objekte der Vorlesung definieren. Dazu ist aber noch ein Warnhinweis angebracht: In der Literatur wird unter einer Translationsfläche meist das verstanden, was wir endliche Translationsfläche nennen wollen. Wir wollen aber die nicht-endlichen Translationsflächen in unserer Definition bewusst nicht ausschließen.

Definition 1.6 (Translationsfläche)

Eine *Translationsfläche* (X, ω) (engl.: flat surface, translation surface) ist eine zusammenhängende zweidimensionale Mannigfaltigkeit X , die mit einer Translationsstruktur ω ausgestattet ist.

Da Translationen biholomorph sind, kann eine Translationsfläche immer auch als Riemannsche Fläche aufgefasst werden.

Wie auf Riemannschen Flächen im Allgemeinen können wir jetzt auf Translationsflächen im Speziellen eine Metrik definieren.

Definition 1.7 (Flache Metrik auf einer Translationsfläche)

Für zwei Punkte x, y einer Translationsfläche (X, ω) definieren wir den Abstand d_X über

$$d_X(x, y) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} l(\varphi_i(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]})) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow X \text{ Weg von } x \text{ nach } y, \right. \\ \left. \begin{array}{l} 0 := t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \text{ Zerlegung von } [0, 1], \\ \text{so dass es Translationskarten } (U_i, \varphi_i) \text{ gibt mit} \\ \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i \text{ und } (\varphi_i \circ \gamma)|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ rektifizierbar} \end{array} \right\},$$

wobei $l(\gamma)$ die Weglänge eines Weges $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sein soll. Die Abbildung d_X heißt *flache Metrik* auf (X, ω) .

Proposition 1.8 (d_X ist Metrik)

Die Abbildung $d_X: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf X .

Beweis. • Positive Semi-Definitheit: $d_X(x, y) \geq 0$ nach Definition der Weglänge und der Metrik auf \mathbb{R}^2 .

- Definitheit: Seien $x, y \in X, x \neq y$. Dann gibt es wegen der Hausdorff-Eigenschaft von X Translationskarten $(U_x, \varphi_x), (U_y, \varphi_y) \in \omega$, die x und y trennen, das heißt $x \in U_x, y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$. Wir wählen $\epsilon > 0$ so, dass

$$V'_x := B_{\mathbb{R}^2}(\varphi_x(x), \epsilon) \subseteq \varphi_x(U_x)$$

gilt und definieren $U'_x := \varphi_x^{-1}(V'_x)$. Dann muss jeder Weg in X von x nach y den Rand von U'_x schneiden und weil sich bei Kartenwechsel die Weglänge nicht ändert, hat dieser Weg mindestens die Länge ϵ . Insbesondere gilt $d_X(x, y) \neq 0$.

- Symmetrie: $d_X(x, y) = d_X(y, x)$, da $l(\gamma) = l(\gamma^-)$ für den in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg γ^- von y nach x gilt.
- Dreiecks-Ungleichung: Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein rektifizierbarer Weg von x nach y und $\gamma': [0, 1] \rightarrow X$ ein rektifizierbarer Weg von y nach z . Dann ist der zusammengesetzte Weg

$$\gamma\gamma': [0, 1] \rightarrow X, t \mapsto \begin{cases} \gamma(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma'(2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1, \end{cases}$$

ein rektifizierbarer Weg von x nach z und es gilt

$$l(\gamma) + l(\gamma') = l(\gamma\gamma') \geq d_X(x, z).$$

Da diese Gleichung für alle γ und γ' gilt, folgt damit auch

$$d_X(x, y) + d_X(y, z) \geq d_X(x, z). \quad \square$$

Da wir nun eine Metrik auf einer Translationsfläche (X, ω) kennen, können wir uns mit den kürzesten Verbindungen auf (X, ω) bezüglich dieser Metrik beschäftigen. Allerdings können hier Effekte auftreten, die uns dazu veranlassen, keine global, sondern nur lokal kürzeste Verbindungen zu betrachten.

Definition 1.9 (Geodätische)

Eine stetige Abbildung $\gamma: I \rightarrow X$ von einer zusammenhängenden Teilmenge I von \mathbb{R} in einen metrischen Raum X heißt *geodätisch*, wenn es für jedes $t \in I$ eine Umgebung (t_1, t_2) von t gibt, so dass $\gamma|_{(t_1, t_2)}$ isometrisch auf sein Bild ist.

Das Bild von γ heißt dann *Geodätische*.

In der Definition von geodätischem Weg sind also insbesondere auch Wege zugelassen, die auf einem offenem Intervall I definiert sind. Manche davon können nicht auf das entsprechende abgeschlossene Intervall fortgesetzt werden, da eine Translationsfläche (X, ω) im Allgemeinen nicht metrisch vollständig ist. Insbesondere ist sie im Allgemeinen auch nicht kompakt.

Wir können die Fläche X allerdings wie jeden metrischen Raum komplettieren, indem wir X durch den Raum der Cauchy-Folgen in X modulo der Teilmenge der Nullfolgen darin ersetzen¹. Diese metrische Komplettierung von X wollen wir \overline{X} nennen.

Definition 1.10 (Singularität)

Die Elemente von $\overline{X} \setminus X$ nennen wir *Singularitäten* der Translationsfläche (X, ω) .

Wir werden in diesem Skript für alle Translationsflächen voraussetzen, dass ihre Singularitäten eine diskrete Menge bilden. Wie diese Singularitäten aussehen können, werden wir in Kapitel 2 sehen.

¹siehe [Kü10, Konstruktion 2.2.4 und Proposition 2.2.6] oder [Jä08, Abschnitt 4.1] für eine ausführliche Beschreibung der Konstruktion und für Beweise

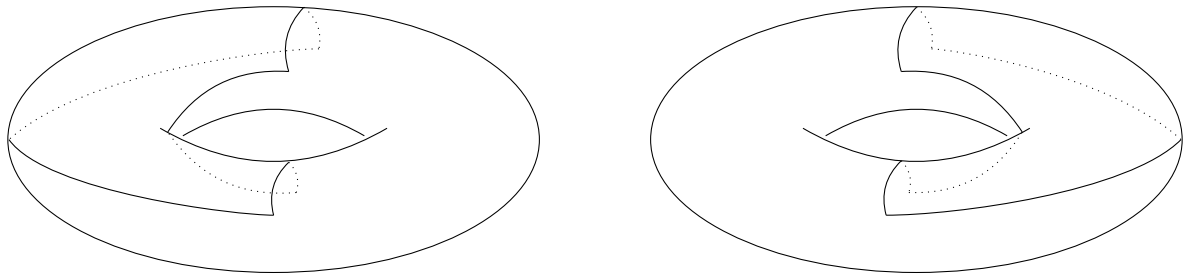


Abbildung 1.2: zwei der vier offenen Teilmengen U_1, \dots, U_4 auf dem Torus

1.2 Endliche Translationsflächen

Wir wollen zunächst konkreter werden und uns mit endlichen Translationsflächen beschäftigen. Dadurch können wir uns jeweils Aussagen aus der weiter entwickelten Theorie der endlichen Translationsflächen anschauen, bevor wir uns den allgemeineren Aussagen zuwenden.

Wie wir gleich sehen werden, gibt es für endliche Translationsflächen einige Beschreibungsweisen, die jeweils verschiedene Vorzüge haben. Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir deshalb immer wieder zwischen den verschiedenen Definitionen hin- und herspringen.

Definition 1.11 (Endliche Translationsfläche I)

Eine *endliche Translationsfläche* (X, ω) ist eine subkompakte zusammenhängende zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit X , die mit einer Translationsstruktur ω ausgestattet ist. Dabei heißt *subkompakt*, dass die metrische Kompletierung \bar{X} eine kompakte Mannigfaltigkeit ist und die Anzahl der Singularitäten endlich ist.

Statt Subkompaktheit wird in der Literatur manchmal auch der Begriff der Präkompaktheit verwendet, der jedoch von vielen anderen Autoren mit Totalbeschränktheit (siehe Definition 4.37) gleichgesetzt wird, was eine schwächere Eigenschaft ist.

Beispiel 1.12 (Endliche Translationsfläche nach Definition I). Betrachte auf einem Torus vier offene Mengen U_1, \dots, U_4 , die sich jeweils in „rechteckigen“ Teilmengen schneiden (zum Beispiel wie in Abbildung 1.2). Definiere dann $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, 4$, so dass jedes U_i auf ein offenes Rechteck $R_i \subseteq \mathbb{R}^2$ abgebildet wird und $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ jeweils aus zwei bzw. vier offenen Rechtecken in R_i besteht (siehe Abbildung 1.3). Diese Wahl können wir so treffen, dass die Kartenwechselabbildungen lokal Translationen sind. Wenn wir nun die U_i mit kleineren offenen Teilmengen überdecken und über die Einschränkung von φ_i neue Karten definieren, erhalten wir als Kartenwechselabbildungen dieser neuen Karten globale Translationen. Auf diese Weise können wir eine Translationsstruktur auf dem Torus definieren.

Definition 1.13 (Endliche Translationsfläche II)

Seien P_1, \dots, P_n endlich viele disjunkte Polygone in der Ebene, P_i^* jeweils das Polygon P_i ohne seine Ecken und $D := \bigcup_{i=1}^n \partial P_i^*$ die Vereinigung aller Kanten der Polygone ohne

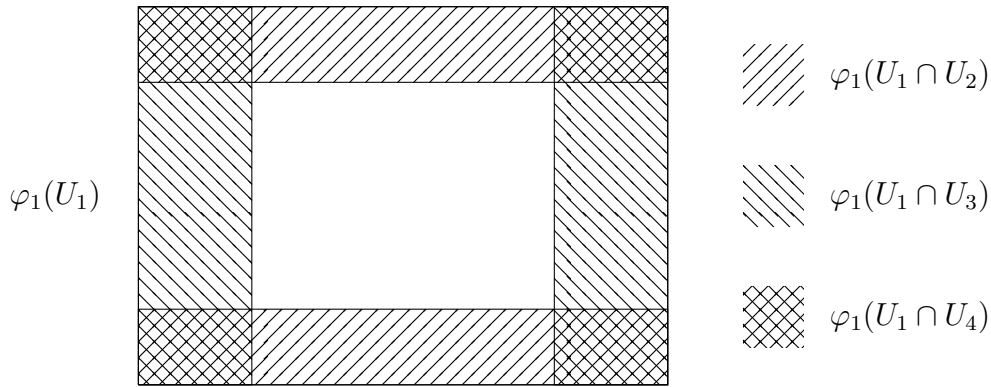


Abbildung 1.3: so könnte das Bild von U_1 unter φ_1 aussehen

die Ecken. Weiterhin sei eine Orientierung der Ebene und passend dazu eine Orientierung auf jeder Kante gewählt und T eine Involution auf D , so dass T eingeschränkt auf das Innere einer Kante jeweils eine Translation auf eine entgegengesetzt orientierte Kante ist.

Ist dann die Fläche

$$X := \left(\bigsqcup_{i=1}^n P_i^* \right) / T$$

zusammenhängend, so nennen wir (X, ω) eine *endliche Translationsfläche*.

Dabei steht ω für den Atlas, der durch die Einbettung der Polygone in \mathbb{R}^2 und die Identifizierung der Kanten via T gegeben ist.

Bemerkung 1.14 (Anschaulichere Formulierung). Etwas informaler spricht man bei endlichen Translationsflächen nach Definition II oft von Polygonen, die an parallelen und gleich langen Seiten verklebt werden, so dass eine zusammenhängende und orientierbare Fläche entsteht. Das wird genau durch die Anforderungen an T ausgedrückt.

Bemerkung 1.15 (Flache Metrik). Die Metrik erhalten wir hier als Quotientenmetrik² aus der euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^2 . In unserem Fall könnte eine Formel also so aussehen:

$$d_X(x, y) = \inf \left\{ d_{\mathbb{R}^2}(x, x_1) + \sum_{i=1}^{m-1} (d_{\mathbb{R}^2}(T(x_i), (x_{i+1}))) + d_{\mathbb{R}^2}(T(x_m), y) : \right. \\ \left. x_1, \dots, x_m \text{ auf dem Rand der Polygone} \right\}$$

Beispiel 1.16 (Endliche Translationsfläche nach Definition II). Sei $n \geq 3$. Betrachte zwei regelmäßige n -Ecke, die sich eine Kante teilen (oder bei denen zwei Kanten parallel sind).

²Im Allgemeinen ist der Quotientenraum eines metrischen Raums selbst kein metrischer Raum, es lässt sich jedoch immer eine Quotiententopologie wie in [Kü10, Konstruktion 3.1.10] definieren. Viele ausführliche Beispiele dazu gibt es in [Jä08, Kapitel 3].

Zu jeder der $n - 1$ übrigen Kanten des einen n -Ecks gibt es jetzt eine parallele und gleich lange Kante unter den $n - 1$ übrigen Kanten des anderen n -Ecks. Diese parallelen Kanten identifizieren wir jeweils durch die entsprechenden Translationen (siehe Abbildung 1.4).

Das Beispiel gehört zu den ersten und meistuntersuchtesten und wird häufig „Veechs Doppel- n -Eck“ genannt. Wir werden noch häufig darauf zurückkommen.

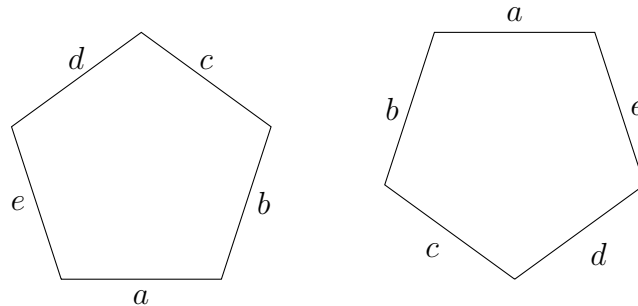


Abbildung 1.4: Veechs Doppel- n -Eck für $n = 5$: mit gleichen Buchstaben beschriftete Kanten werden identifiziert

Bemerkung 1.17 (Winkel um Singularitäten). Wir können an dieser Stelle festhalten, dass wir um die Singularitäten auf endlichen Translationsflächen nach Definition II zwar meistens keinen Winkel von 2π wie für Punkte in \mathbb{R}^2 haben, aber dafür immer einen Winkel von $2\pi \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. In Kapitel 2 wollen wir diese Aussage vertiefen, aber wir benötigen sie schon etwas früher in Satz 1.

Beträgt der Winkel um eine Singularität genau 2π , dann könnten wir alle Kanten, die in dieser Singularität enden, verkleben und würden ein größeres Polygon in \mathbb{R}^2 erhalten. Aus diesem Grund nennen wir solche Singularitäten *hebbar*.

Um die dritte Definition für endliche Translationsflächen verstehen zu können, müssen wir noch etwas Vorarbeit leisten. Dafür unterscheidet sich diese Definition auch stärker von den ersten beiden und stellt uns zusätzliche Methoden zur Verfügung.

Definition 1.18 (Differentialform)

Sei (X, ν) eine Riemannsche Fläche und (U, φ) eine Karte auf X . Eine *glatte Funktion* auf U ist eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f \circ \varphi^{-1}$ glatt (d. h. unendlich oft differenzierbar) im Sinne der reellen Analysis ist. Den *Raum der glatten Funktionen* auf U nennen wir $C^\infty(U)$.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \varphi \downarrow & \nearrow f \circ \varphi^{-1} & \\
 \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C} & &
 \end{array}$$

Wir lernen zunächst, wie man glatte Funktionen auf U nach x ableitet (Ableiten nach y ist analog definiert). Dabei machen wir uns zunutze, dass wir uns mit Ableiten von Funktionen von \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} schon gut auskennen:

$$\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x} : C^{\infty}(U) \rightarrow C^{\infty}(U), f \mapsto \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x} \circ \varphi$$

Allerdings ist Ableiten auf einer anderen Karte (U', φ') im Allgemeinen dazu nicht konsistent, das heißt $\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x} f \neq \frac{\partial}{\partial_{\varphi'}x} f$ für ein allgemeines $f \in C^{\infty}(U \cap U')$. Allerdings kann man zeigen, dass $\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x}$ sich als $C^{\infty}(U \cap U')$ -Linearkombination von $\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x}$ und $\frac{\partial}{\partial_{\varphi}y}$ schreiben lässt (analog für $\frac{\partial}{\partial_{\varphi}y}$).

Daher möchten wir für eine Karte (U, φ) statt den Ableitungen nach x und y lieber den *Modul der Derivationen*³ auf U betrachten:

$$\tilde{\Omega}_X(U) := \left\{ f \cdot \frac{\partial}{\partial_{\varphi}x} + g \cdot \frac{\partial}{\partial_{\varphi}y} : f, g \in C^{\infty}(U) \right\}$$

Ableiten nach x (analog nach y) an einem Punkt $p \in U$ bezeichnen wir dann mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x} \right)_p : C^{\infty}(U) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x} f \right)(p),$$

womit wir den *Tangentialraum*⁴ des Punktes $p \in U$ definieren können:

$$T_p(U) := \left\{ f(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x} \right)_p + g(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_{\varphi}y} \right)_p : f, g \in C^{\infty}(U) \right\}$$

Damit ist $T_p(U)$ ein höchstens zweidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Der Dualraum zum Tangentialraum heißt *Kotangentialraum* und wird mit $T_p^*(U)$ bezeichnet. Es ist also

$$T_p^*(U) = \{ t : T_p(U) \rightarrow \mathbb{R} \mid t \text{ linear} \} = \{ f(p) \cdot d_{\varphi}x + g(p) \cdot d_{\varphi}y : f, g \in C^{\infty}(U) \},$$

wobei $d_{\varphi}x := ((\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x})_p)^*$ und $d_{\varphi}y := ((\frac{\partial}{\partial_{\varphi}y})_p)^*$ die dualen Basiselemente zu den Basiselementen $(\frac{\partial}{\partial_{\varphi}x})_p$ und $(\frac{\partial}{\partial_{\varphi}y})_p$ von $T_p(U)$ bilden.

Mit diesem Vokabular im Hintergrund können wir endlich zu den Differentialformen kommen: Wir definieren für eine offene Menge $U \subseteq X$ den *Raum der Differentialformen*

³Im Allgemeinen ist für einen Ring R und eine R -Algebra A eine *Derivation* eine R -lineare Abbildung $D: A \rightarrow A$, die für alle $a_1, a_2 \in A$ die Leibnizregel $D(a_1 a_2) = D(a_1) a_2 + a_1 D(a_2)$ erfüllt. Dass die Bezeichnung „Modul der Derivationen“ für $\tilde{\Omega}_X(U)$ in diesem Sinn gerechtfertigt ist, wollen wir hier nicht erörtern.

⁴Mit ein bisschen Übersetzungsarbeit könnten wir hier auch einsehen, dass diese Definition mit anderen gängigen Definitionen des Tangentialraums übereinstimmt, aber das würde uns auf unserem Weg zu den Differentialformen zu sehr aufhalten.

oder *Raum der 1-Formen* auf U als

$$\Omega'_X(U) := \left\{ \omega: U \rightarrow \bigsqcup_{p \in U} T_p^*(U) \mid \text{für alle } p \in U \text{ gilt } \omega(p) \in T_p^*(U) \right. \\ \text{und es gibt eine Karte } (U_p, \varphi_p) \text{ und } f, g \in C^\infty(U_p) \\ \left. \text{mit } p \in U_p \subseteq U \text{ und } \omega = f \cdot d_{\varphi_p}x + g \cdot d_{\varphi_p}y \text{ auf } U_p \right\}.$$

Bemerkung 1.19 (Formale Beschreibung von Elementen des Kotangentialraums). Bei der lokalen Beschreibung einer Differentialform ω muss man sich darüber im Klaren sein, dass $d_\varphi x$ und $d_\varphi y$ eigentlich nur für festes p definiert sind. Allerdings sind beide Ausdrücke für jedes $p \in U'$ definiert, so dass diese Schreibweise ausdrückt, dass die Koeffizienten vor den jeweiligen Basiselementen $((\frac{\partial}{\partial_\varphi x})_p)^*$ und $((\frac{\partial}{\partial_\varphi y})_p)^*$ sich in Abhängigkeit von p durch glatte Funktionen beschreiben lassen.

Definition 1.20 (Holomorphe 1-Form)

Wir können die Betrachtungen aus Definition 1.18 auch komplex statt reell machen. Der komplexe Tangentialraum ist dann $T_p(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und der komplexe Kotangentialraum $T_p^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Sei (U, φ) eine Karte auf X . Analog zu den glatten Funktionen auf U ist eine *holomorphe Funktion* auf U eine Abbildung $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph im Sinne der komplexen Analysis ist. Den *Raum der holomorphen Funktionen* auf U nennen wir $\mathcal{O}(U)$.

Für eine Karte (U, z) auf X mit $z = x + i \cdot y$ können wir die Differentialformen

$$dz := \frac{1}{2} (d_z x \otimes 1 + i \cdot d_z y \otimes 1) \quad \text{und} \quad d\bar{z} := \frac{1}{2} (d_z x \otimes 1 - i \cdot d_z y \otimes 1)$$

definieren. Dann bilden dz und $d\bar{z}$ ebenso wie $d_z x \otimes 1$ und $d_z y \otimes 1$ eine komplexe Basis des Kotangentialraums $T_p^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Lässt sich eine Differentialform $\omega \in \Omega'_X(U)$ lokal jeweils als $\omega = f \cdot dz$ mit $f \in \mathcal{O}(U')$ für geeignete U' darstellen, so heißt ω *holomorphe 1-Form* auf U . Den *Raum der holomorphen 1-Formen* auf U bezeichnen wir mit $\Omega_U(X)$. Meist wird abkürzend auch $\Omega(X) := \Omega_X(X)$ für den Raum der holomorphen 1-Formen auf X verwendet.

Wer genauer nachlesen will, wie Differentiale definiert sind und wofür sie sich verwenden lassen, kann die hier verwendete analytische Sichtweise sehr ausführlich in [Spi65, Kapitel 4 und 5] oder etwas schneller in [For77, Kapitel 9] kennen lernen. Die algebraische Sichtweise kann man dagegen in [Har77, Kapitel II.8] oder [Mat70, Kapitel 10] erforschen. Wer vor allem die Lücken in Definition 1.18 schließen will, kann das in [WZ11] nachlesen, da ich denselben Aufbau wie dort gewählt habe.

Definition 1.21 (Endliche Translationsfläche III)

Sei X eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche und $\omega \in \Omega(X)$, $\omega \neq 0$ eine holomorphe 1-Form. Sei Z die Menge der Nullstellen von ω und $X^* := X \setminus Z$. Dann definieren X^* und ω eine *endliche Translationsfläche* (X^*, ω) .

Bemerkung 1.22 (Singularitäten). Die Singularitäten einer endlichen Translationsfläche nach Definition III sind genau die Nullstellen von ω . Ist (U, z) eine Karte, so dass sich ω auf U als $f \cdot dz$ mit $f \in \mathcal{O}(U)$ schreiben lässt, so gilt für jedes $p \in U$:

$$\omega(p) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(p) \cdot (d_z x \otimes 1 - i \cdot d_z y \otimes 1) \text{ ist die Nullfunktion.}$$

Für eine Nullstelle p von ω muss daher für jedes $h_1(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_z x}\right)_p + h_2(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_z y}\right)_p \in T_p(U)$ gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2}f(p) \cdot (d_z x \otimes 1 - i \cdot d_z y \otimes 1) \right) \left(h_1(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_z x} \right)_p + h_2(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_z y} \right)_p \right) \\ &= \frac{1}{2}f(p) \cdot \left(\left(\left(\frac{\partial}{\partial_z x} \right)_p \right)^* - i \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial_z y} \right)_p \right)^* \right) \left(h_1(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_z x} \right)_p + h_2(p) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial_z y} \right)_p \right) \\ &= \frac{1}{2}f(p) \cdot (h_1(p) - i \cdot h_2(p)) \end{aligned}$$

Das ist aber nur möglich, wenn $f(p) = 0$ gilt. Also sind die Nullstellen von ω auf U genau die Nullstellen von f . Insbesondere ist die Nullstellenmenge von ω auf U diskret, da dies für f aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt.

Da wir X durch solche Karten (U, φ) überdecken können, ist auch die Nullstellenmenge von ω auf ganz X diskret. Aus der Kompaktheit von X folgt dann, dass ω auf ganz X nur endlich viele Nullstellen hat.

Bemerkung 1.23 (Hebbare Singularitäten). Analog zu den hebbaren Singularitäten von endlichen Translationsflächen nach Definition II benötigen wir aus technischen Gründen auch hier manchmal *hebbare Singularitäten* (zum Beispiel in Satz 1). Das realisieren wir, indem wir Z formal um die entsprechenden Punkte von X vergrößern, ohne dass sie zwingend Nullstellen von ω sind. Genauer sollten wir in Definition 1.21 also sagen: Sei Z eine endliche Menge von Punkten von X , die alle Nullstellen von ω enthält.

Auf den endlichen Translationsflächen nach Definition III haben wir eine weitere Möglichkeit, die Metrik zu beschreiben, nämlich durch Wegintegration:

Bemerkung 1.24 (Wegintegration, Metrik auf (X, ω)). Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, (U, φ) eine Karte auf X und $\omega \in \Omega_X(U)$ so, dass es ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gibt mit $\omega = f \cdot d\varphi$ auf U . Sei weiter $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ ein Weg in U . Dann ist das *lokale Wegintegral* $\int_\gamma \omega$ folgendermaßen definiert:

$$\int_\gamma \omega := \int_\gamma f \cdot d\varphi := \int_{\varphi(\gamma)} (f \circ \varphi^{-1}) dz := \int_0^1 (f \circ \gamma)(t) \cdot (\varphi \circ \gamma)'(t) dt$$

Dabei entspricht die letzte Gleichung genau der Definition des Wegintegrals in \mathbb{C} . Man kann zeigen, dass diese Definition des lokalen Wegintegrals unabhängig von der gewählten Karte ist.

Ein globales Wegintegral lässt sich nun durch stückweises Zusammensetzen eines Wegs über lokale Wegintegrale definieren. Sei dazu jetzt $\omega \in \Omega(X)$ und $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ ein Weg in X . Dann gibt es eine Zerlegung $0 =: t_0, t_1, \dots, t_n := 1$ des Intervalls $[0, 1]$, so dass $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ für jedes $i = 0, \dots, n-1$ in einer Karte (U_i, φ_i) wie oben liegt.

Definiere dann das *Wegintegral* $\int_\gamma \omega$ durch

$$\int_\gamma \omega := \int_{\gamma|_{[t_0, t_1]}} \omega|_{U_0} + \dots + \int_{\gamma|_{[t_{n-1}, t_n]}} \omega|_{U_{n-1}}.$$

Auch diese Definition ist unabhängig von der getroffenen Wahl, in diesem Fall von der Wahl der Zerlegung.

Damit können wir die Länge eines differenzierbaren Weges $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ definieren. Zunächst sei γ wieder ein Weg in U , so dass (U, φ) eine Karte ist, $\varphi \circ \gamma$ rektifizierbar ist und $\omega = f \cdot d\varphi$ auf U für ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gilt. Dann definieren wir die Länge von γ als

$$l(\gamma) := \int_\gamma |f| |dz| := \int_0^1 |(f \circ \gamma)(t)| \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

Auch $l(\gamma)$ hängt nicht von der gewählten Karte ab. Für einen allgemeinen Weg γ in X wählen wir wieder eine geeignete Zerlegung des Intervalls $[0, 1]$ und bestimmen die Länge von γ stückweise.

Für zwei Punkte $x, y \in X$ gilt jetzt:

$$d_X(x, y) := \inf \{l(\gamma) : \gamma \text{ rektifizierbarer Weg von } x \text{ nach } y\}$$

Wer sich nicht mit den vielen Behauptungen zur Unabhängigkeit von der Kartenwahl abfinden will, kann in [WS11, Seite 6ff.] Beweise zu diesen Behauptungen nachlesen.

Beispiel 1.25 (Endliche Translationsfläche nach Definition III). Da konkrete Differentialformen meist ziemlich unhandlich sind, wollen wir uns mit folgendem Beispiel begnügen: Auf einem Torus X mit einem komplexen Atlas können wir eine holomorphe 1-Form ω definieren, indem wir für jede komplexe Karte (U, φ) fordern, dass $\omega = 1 \cdot d\varphi$ auf U gilt (warum diese Forderung erfüllt werden kann, sehen wir gleich im Beweis von Satz 1). Dadurch erhalten wir eine Translationsfläche ohne Singularitäten.

Satz 1 (Äquivalenz der Definitionen I bis III)

Die Definitionen I bis III für endliche Translationsflächen beschreiben die gleichen Objekte.

Beweis. (i) Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche nach Definition I. Es gibt eine endliche Triangulierung von \overline{X} , so dass jede Singularität eine Ecke ist und es für jedes Dreieck Δ in X eine Karte (U, φ) gibt, so dass $\Delta \subseteq U$ gilt und $\varphi(\Delta)$ ein Dreieck in \mathbb{R}^2 ist.

Wir betrachten nun die Menge der Dreiecke $\varphi(\Delta)$ in \mathbb{R}^2 und kleben um jede Dreiecksecke, die keine Singularität ist, alle anliegenden Dreiecke zusammen (das

geht, weil die Kartenwechselabbildungen Translationen sind). Versieht man die so erhaltenen Polygone im \mathbb{R}^2 wieder mit den Verklebevorschriften, die sich daraus ergeben, welche Dreiecke sich in \overline{X} eine Kante teilen, so erhält man X bzw. \overline{X} . Also ist (X, ω) auch eine endliche Translationsfläche nach Definition II.

- (ii) Sei jetzt (X, ω) eine endliche Translationsfläche nach Definition II. Für $x \in X$ besteht das Urbild von x unter der Quotientenabbildung π entweder aus einem Punkt im Inneren eines Polygons oder aus zwei Punkten auf dem Rand zweier nicht notwendigerweise verschiedener Polygone.

Im ersten Fall können wir eine genügend kleine Umgebung U von x betrachten, so dass $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ als lokale Inverse der Quotientenabbildung π definiert werden kann und haben damit eine Karte (U, φ) um x .

Im zweiten Fall findet man auf ähnliche Weise eine Karte (V, ψ) . Dabei besteht jedoch das Urbild der Umgebung V von x unter π aus zwei Zusammenhangskomponenten und das Bild von $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ muss auf einer der Zusammenhangskomponenten noch durch eine Translation transformiert werden (dadurch stellen wir auch die Wohldefiniertheit von $\psi(x)$ her).

Aus der Menge dieser Karten für alle $x \in X$ erhalten wir einen Translationsatlas. Damit ist (X, ω) auch eine endliche Translationsfläche nach Definition I.

- (iii) Sei (X, ω) wieder eine endliche Translationsfläche nach Definition I. Dann ist \overline{X} eine kompakte Mannigfaltigkeit. Wir betrachten die holomorphe 1-Form dz auf \mathbb{C} . Diese können wir entlang der Karten zurückziehen auf X , das heißt wir definieren $\omega' \in \Omega(X)$ durch $\omega'_{|U} := d\varphi$ auf einer Karte (U, φ) .

Damit ω' global wohldefiniert ist, müssen für je zwei Karten $(U, \varphi), (U', \varphi')$ mit $U \cap U' \neq \emptyset$ die holomorphen 1-Formen $\omega'_{|U}$ und $\omega'_{|U'}$ auf $U \cap U'$ übereinstimmen. Da $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ auf $\varphi(U \cap U')$ eine Translation t ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial_{\varphi'x}}(f) &= \frac{\partial}{\partial_{(t \circ \varphi)x}}(f) \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1} \circ t^{-1})}{\partial x} \circ (t \circ \varphi) \\ &= \left(\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x} \circ (t^{-1} \circ t \circ \varphi) \right) \cdot \left(\frac{\partial t^{-1}}{\partial x} \circ (t \circ \varphi) \right) \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x} \circ \varphi \\ &= \frac{\partial}{\partial_{\varphi x}}(f) \end{aligned}$$

für alle $f \in C^\infty(U \cap U')$ und damit auch $(\frac{\partial}{\partial_{\varphi'x}})_p = (\frac{\partial}{\partial_{\varphi x}})_p$ sowie $d_{\varphi'x} = d_{\varphi x}$ und analog $d_{\varphi'y} = d_{\varphi y}$.

Die holomorphe 1-Form ω' müssen wir jetzt noch von X auf \overline{X} fortsetzen. Dazu benutzen wir, dass es für jede Singularität σ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass der Winkel um σ

gerade $2\pi k$ beträgt. Wir wählen $\epsilon > 0$ klein genug, so dass es für $U := B(\sigma, \epsilon) \subseteq \overline{X}$ eine k -fache Überlagerung $\psi: U \rightarrow V := B(0, \epsilon)$ gibt. Dabei sei ψ so gewählt, dass für jede Karte $(U', \varphi') \in \omega$ gilt $(\varphi' \circ \psi^{-1})(z) = z^k + c$. Dann ist \overline{X} mit den zusätzlichen Karten (U, ψ) um die Singularitäten eine Riemannsche Fläche und wir können $\omega'_{|U} := k \cdot z^{k-1} \cdot d\psi$ definieren. Diese Definition ist sinnvoll, denn ähnlich wie oben (nur mit mehr Rechnen bei der Kettenregel) können wir zeigen, dass $d\varphi' = k \cdot z^{k-1} \cdot d\varphi$ gilt. Auf diese Weise wird ω' zu einer holomorphen 1-Form auf \overline{X} .

Sollte ω' in den Punkten von $\overline{X} \setminus X$ keine Nullstellen haben (also $k = 1$ gelten), fassen wir diese Punkte als hebbare Singularitäten von (X, ω') auf und erhalten dann eine endliche Translationsfläche nach Definition III.

- (iv) Sei (X^*, ω) jetzt eine endliche Translationsfläche nach Definition III, also X^* eine subkompakte Riemannsche Fläche. Wir definieren nun neue Translationskarten: Für einen Punkt $x \in X^*$ wähle eine Karte (U, φ) , so dass $U \subseteq X^*$ einfach zusammenhängend ist, $\varphi(x) = 0 \in \mathbb{C}$ gilt und es ein $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $\omega = f \cdot d\varphi$ auf U gibt (eine solche Wahl ist spätestens nach dem Übergang zu einem maximalen komplexen Atlas möglich). Definiere die Abbildung

$$\psi: U \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto \int_{\gamma_y} \omega,$$

wobei γ_y ein Weg von x nach y ist. Dabei ist $\psi(y)$ unabhängig vom gewählten Weg (das sagt eine Version des Cauchyschen Integralsatzes). Also ist

$$\psi(y) = \int_{\gamma_y} \omega = \int_{\gamma_y} f \cdot d\varphi = \int_{\varphi(\gamma_y)} (f \circ \varphi^{-1}) dz$$

und da $f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C}$ nach Wahl von f holomorph ist, gibt es in einer Umgebung von 0 eine Stammfunktion F von $f \circ \varphi^{-1}$ mit $F(0) = 0$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Wegintegrale gilt dann

$$\psi(y) = F(\varphi(y)) - F(\varphi(x)) = (F \circ \varphi)(y).$$

Da $x \in X^*$ gewählt war, ist x keine Nullstelle von ω und damit gilt $F'(0) = f(x) \neq 0$. Daraus folgt, dass F in einer Umgebung von 0 biholomorph auf ihr Bild ist und damit ist auch $\psi = F \circ \varphi$ in einer Umgebung von 0 biholomorph auf ihr Bild. Das Urbild dieser Umgebung um 0 unter φ heiße \tilde{U} . Dann ist (\tilde{U}, ψ) eine der gesuchten Karten.

Wir müssen jetzt noch die Kartenwechselabbildungen bestimmen. Seien dazu (\tilde{U}, ψ) und (\tilde{U}', ψ') Karten mit $x \in \tilde{U}$, $x' \in \tilde{U}'$ und $\tilde{U} \cap \tilde{U}' \neq \emptyset$. Dann gilt für jedes $y \in \tilde{U} \cap \tilde{U}'$

$$\psi(y) - \psi'(y) = \int_{\gamma_y} \omega - \int_{\gamma'_y} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

wobei γ ein Weg von x nach x' ist. Da diese Differenz unabhängig von $y \in \tilde{U} \cap \tilde{U}'$ ist, sind alle Kartenwechselabbildungen des neu definierten Atlanten Translationen. Daher ist (X^*, ω) auch eine endliche Translationsfläche nach Definition I. \square

Historisch gesehen sehr nahe steht den endlichen Translationsflächen die Theorie der Billards, die uns noch eine Möglichkeit zur Konstruktion von Translationsflächen liefert. Allerdings bekommen wir dadurch keine weitere äquivalente Definition für endliche Translationsflächen, denn auf dem hier vorgestellten Weg lassen sich nicht alle endlichen Translationsflächen konstruieren.

Definition 1.26 (Billard)

Gegeben sei ein Polygon, das wir als Billardtisch ansehen wollen. Darauf stellen wir uns eine punktförmige Billardkugel vor, die sich nach folgenden Regeln verhält:

- (i) Wird die Kugel angestoßen, so rollt sie geradlinig über den Tisch (kein Effet).
- (ii) Die Kugel rollt unendlich lange (Vernachlässigung der Reibung).
- (iii) Trifft die Kugel auf den Rand, so gilt Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel.
- (iv) Trifft die Kugel auf eine Ecke, so bleibt sie liegen.

Bemerkung 1.27 (Entfaltung von Billards). Wir wollen nun die Bahn einer Billardkugel auf unserem Billardtisch betrachten. Eine solche Billardbahn können wir konstruieren, indem wir bei jedem Aufprallen der Kugel auf den Rand die Regel „Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ anwenden. Versucht man sich allerdings an einer Zeichnung, stellt man schnell fest, dass das sehr unübersichtlich wird (siehe Abbildung 1.5).

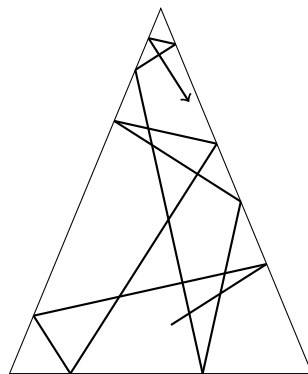


Abbildung 1.5: der erste Teil einer Billardbahn auf einem dreieckigen Billardtisch

Übersichtlicher ist folgende Methode: Trifft die Kugel auf den Rand, so wird der Billardtisch an diesem Rand gespiegelt und die Bahn ebenfalls gespiegelt fortgesetzt. Dadurch

läuft die Billardbahn geradlinig über den Rand hinaus (siehe Abbildung 1.6). Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis beim nächsten Spiegeln ein Polygon entstehen würde, das durch eine Translation aus einer bestehenden Kopie des Billardtischs hervorgehen könnte. Statt zu spiegeln werden dann die entsprechenden Ränder identifiziert.

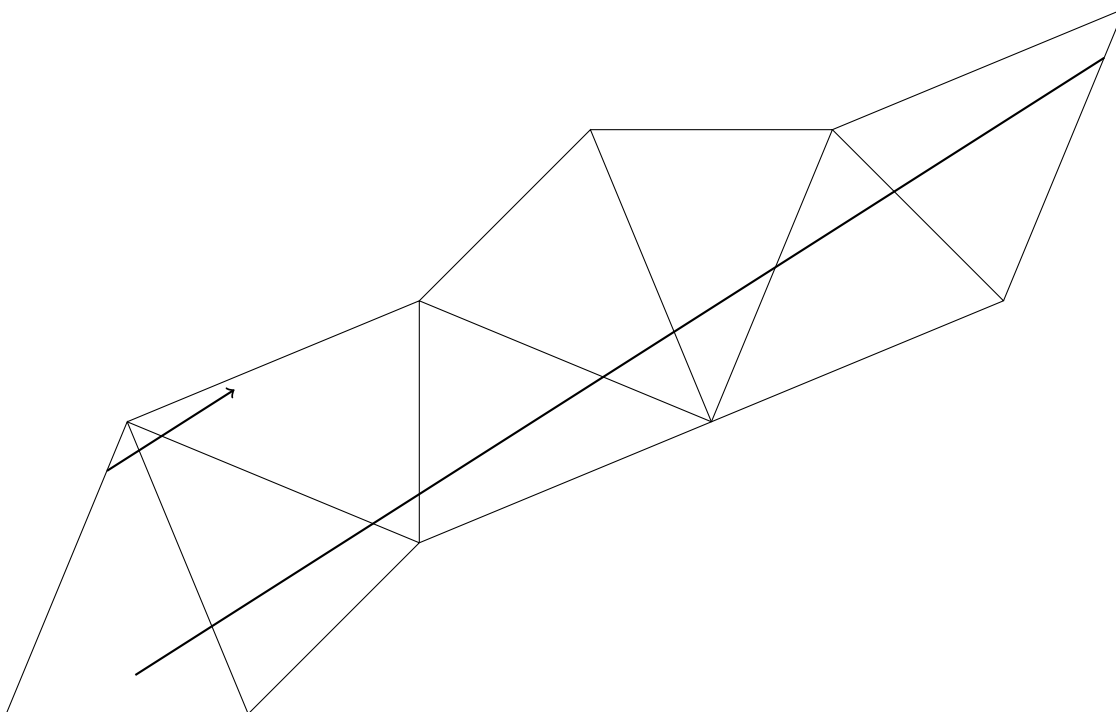


Abbildung 1.6: dieselbe Billardbahn in einer anderen Darstellung

Auch unabhängig von einer speziellen Billardbahn kann man dieses Verfahren anwenden und den Billardtisch *entfalten*. Dazu spiegelt man den Billardtisch an jedem Rand (und die Kopien an den Rändern der Kopien), bis sich alle Ränder verkleben lassen (siehe Abbildung 1.7). Dieses Verfahren wird nach den Mathematikern Aleksandr Zemlyakov und Anatole Katok auch *Z-K-Konstruktion* genannt oder *Entfaltung* (engl. unfolding) (siehe [ZK75] bzw. [ZK76]). Die Konstruktion an sich wurde allerdings schon viel früher von Ralph Fox und Richard Kershner in [FK36] beschrieben.

Das Verfahren endet genau dann nach endlich vielen Schritten, wenn jeder Innenwinkel des Polygons ein rationales Vielfaches von π ist. Die entstehende Fläche mit den Identifizierungen entspricht dann nach Herausnahme der Eckpunkte genau einer endlichen Translationsfläche nach Definition II.

Bei der Betrachtung von Billards liegt der Fokus meist auf den dynamischen Eigenschaften der Fläche. Damit werden wir uns in Kapitel 5 etwas genauer auseinandersetzen. Als Vorgeschmack sei hier eine noch nicht abschließend beantwortete Frage genannt:

Forschungsfrage 1.28. Gibt es in jedem Dreieck eine geschlossene Billardbahn?

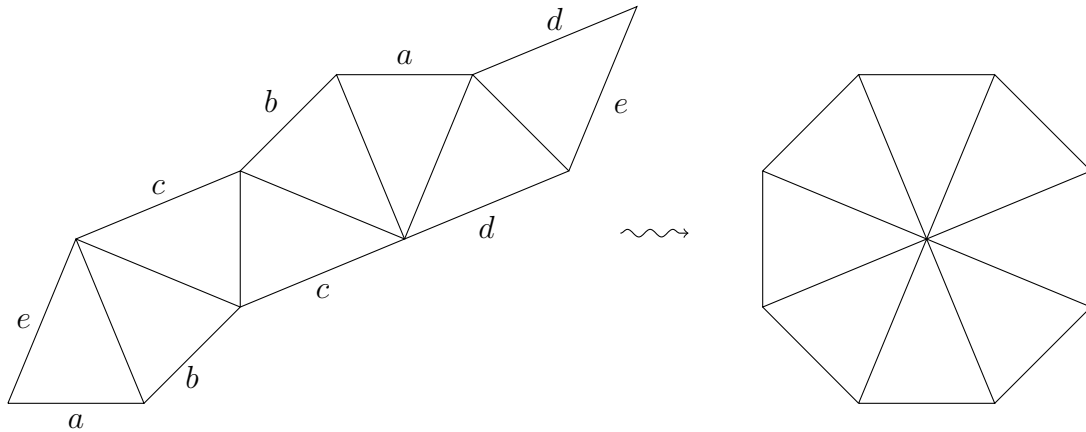


Abbildung 1.7: zwei Möglichkeiten zur Entfaltung des dreieckigen Billardtischs

Bisher ist bekannt, dass es in rationalen Dreiecken (siehe [Mas86]) und in Dreiecken, in denen jeder Winkel kleiner oder gleich 100° ist (siehe [Sch09]), eine geschlossene Bahn gibt. Für alle anderen Fälle ist die Frage noch offen.

1.3 Beispiele für nicht-endliche Translationsflächen

Nachdem wir nun endliche Translationsflächen definiert haben, stellt sich die Frage, ob diese ein echter Spezialfall von Translationsflächen sind oder ob schon alle Translationsflächen endlich sind. Außerdem wissen wir noch nicht, was genau bei endlichen Translationsflächen denn endlich sein muss. Es ergibt sich zwar schon aus der Forderung der Subkompaktheit in der Definition, dass zumindest der Flächeninhalt endlich sein muss, aber das alleine reicht nicht aus. Ein Beispiel für eine nicht-endliche Translationsfläche mit einem endlichen Flächeninhalt ist die Chamanara-Fläche, die wir als zweites Beispiel betrachten werden. Das erste Beispiel ist dagegen sehr naheliegend:

Beispiel 1.29 (\mathbb{C} als Translationsfläche). Die komplexe Ebene \mathbb{C} lässt sich folgendermaßen als Translationsfläche auffassen: Für jede offene Teilmenge U von \mathbb{C} definiere einen Homöomorphismus

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$$

und damit eine Karte (U, φ) . Jede Kartenwechselabbildung ist dadurch die Identität auf \mathbb{R}^2 , also insbesondere eine Translation. Damit sind alle Karten Translationskarten und da ganz \mathbb{C} überdeckt werden kann, definiert die Menge aller solcher Karten eine Translationsstruktur auf \mathbb{C} .

Beispiel 1.30 (Chamanara-Fläche). Wir betrachten ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Die obere Seite wird halbiert, ebenso die untere Seite und der rechte Abschnitt oben mit dem linken Abschnitt unten durch eine Translation verklebt. Der linke Abschnitt oben

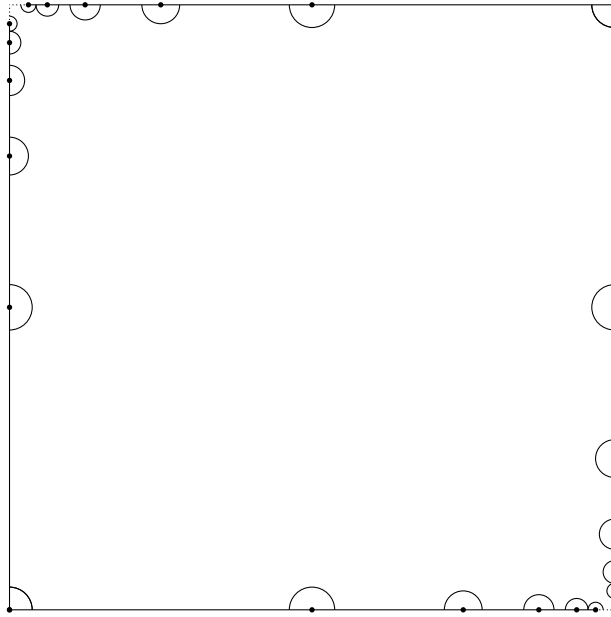


Abbildung 1.8: Chamanara-Fläche: parallele und gleich lange Abschnitte werden verklebt

und der rechte Abschnitt unten werden wieder jeweils halbiert und wie vorher verklebt (siehe Abbildung 1.8). Dieses Verfahren wird unendlich weitergeführt.

Ebenso wird mit der rechten und der linken Seite verfahren, dabei wird jeweils der obere Abschnitt rechts mit dem unteren Abschnitt links verklebt.

In der entstandenen Translationsfläche sind die Singularitäten also genau die Eckpunkte des Quadrats und die beiden Punkte auf dem Rand jedes solchen Abschnitts. Im unverklebten Quadrat häufen sich diese Punkte in der Ecke links oben und der Ecke rechts unten. Durch „Herumlaufen“ um diese Punkte mithilfe der Verklebungen sieht man schnell ein, dass jeder zweite Punkt (auf jeder der vier Seiten) miteinander identifiziert wird. Um zu zeigen, dass diese auch jeweils mit den Häufungspunkten identifiziert werden, bestimmt man in \overline{X} den Abstand des rechten unteren Eck zu einer der beiden Mengen von identifizierten Punkten: Dieser ist das Infimum über die Länge aller horizontalen bzw. vertikalen Geodätischen, die Punkte aus dieser Menge mit der rechten unteren Ecke verbinden. Da die Länge dieser Geodätischen beliebig klein werden kann, ist der Abstand 0 und damit sind in \overline{X} alle Punkte der Menge und der Häufungspunkt im Eck derselbe Punkt. Analog gilt dies auch jeweils für die linke obere Ecke und die anderen Intervallendpunkte. Insgesamt werden alle betrachteten Punkte in \overline{X} also identifiziert und es gibt genau eine einzige Singularität σ ! Insbesondere liegt σ als einzige Singularität diskret in der metrischen Kompletierung \overline{X} .

Ist das jetzt also eine Translationsfläche, die nicht endlich ist? Translationskarten lassen sich auf der entstehenden Fläche X naheliegend um jeden Punkt definieren. Allerdings ist die metrische Kompletierung \overline{X} keine Mannigfaltigkeit, da es keine Umgebung von σ gibt, die homöomorph zu einer Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist. Und damit ist diese Fläche keine

endliche Translationsfläche!

Diese Translationsfläche wurde von Reza Chamanara in [Cha04] ausführlich beschrieben. Auf englisch wird sie häufig *baker's map surface* genannt, da sie auch mit Hilfe einer bestimmten Abbildung (*baker's map*) definiert werden kann. Wir werden das Beispiel noch oft heranziehen, wenn wir uns klarmachen wollen, dass die Welt der Translationsflächen um einiges komplizierter sein kann als die Welt der endlichen Translationsflächen.

Zu bemerken ist noch, dass sich diese Translationsfläche auch durch eine Limes-Konstruktion aus endlichen Translationsflächen erhalten lässt. Das gilt auch für andere Beispiele wie die Arnoux–Yoccoz-Flächen (siehe [Bow13]) und die nicht-endliche Fläche mit Gittereigenschaft von Patrick Hooper, die wir in Abschnitt 5.3 ausführlicher untersuchen werden. Daher sind Aussagen interessant, wie sich bestimmte Eigenschaften einer Folge von endlichen Translationsflächen auf die entsprechende Limes-Fläche übertragen. Das ist im Allgemeinen noch eine offene Frage:

Forschungsfrage 1.31. (i) Lassen sich bei Translationsflächen, die sich als Limes von endlichen Translationsflächen erhalten lassen, Rückschlüsse auf die Veechgruppe oder das dynamische Verhalten ziehen, indem man die Folge von endlichen Translationsflächen betrachtet?

(ii) Gibt es Charakterisierungen für Translationsflächen, die sich als Limes von endlichen Translationsflächen realisieren lassen?

(iii) Welche Limes-Konstruktionen eignen sich für solche Fragen eigentlich?

1.4 Sattelverbindungen und Zylinder

Wir wollen nun noch etwas Vokabular lernen, das uns bei der Beschreibung von Translationsflächen helfen wird. Insbesondere geht es dabei um geschlossene Geodätische und um Geodätische zwischen Singularitäten.

Definition 1.32 (Separatrix, Sattelverbindung)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und \overline{X} die metrische Kompletterung.

(i) Eine *Separatrix* (engl. *separatrix, critical trajectory*) ist das Bild eines geodätischen Strahls $\gamma: \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{X}$, der in einer Singularität beginnt und keine weitere Singularität enthält.

(ii) Eine *Sattelverbindung* (engl. *saddle connection*) ist eine Geodätische in \overline{X} , die zwei nicht notwendigerweise verschiedene Singularitäten verbindet und keine weitere Singularität enthält.

Bemerkung 1.33 (Separatrizes und Sattelverbindungen in X). Oft bezeichnet man auch die entsprechenden Urbilder in X unter der natürlichen Einbettung als Separatrix bzw. Sattelverbindung.

Sattelverbindungen und allgemeiner Geodätischen kann man nicht nur eine Länge zuweisen, sondern anschaulich auch eine Richtung. Insbesondere kann man angeben, wann zwei Sattelverbindungen dieselbe Richtung haben. Wir wollen zur Formalisierung den Begriff des Holonomievektors definieren:

Definition 1.34 (Holonomievektor)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und γ eine Geodätische auf X von $x \in \overline{X}$ nach $y \in \overline{X}$. Wir können nun Punkte $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \dots$ auf γ wählen, so dass es Karten (U_i, φ_i) gibt mit $x_i, x_{i+1} \in U_i$ und so dass γ durch die Vereinigung der U_i überdeckt wird und $\gamma \cap U_i$ jeweils zusammenhängend ist.

Betrachte jetzt die $\varphi_i(U_i)$ in \mathbb{R}^2 . Diese transformieren wir mit den Kartenwechselabbildungen (Translationen!) so, dass $\varphi_{i-1}(x_i)$ und $\varphi_i(x_i)$ zusammenfallen. Dabei beginnen wir mit U_0 und falls ein U_i mehrfach verwendet wird, betrachten wir für jede Verwendung eine Kopie davon. Als transformiertes Bild von γ erhalten wir dann eine offene Geodätische in \mathbb{R}^2 (siehe Abbildung 1.9). Den Differenzvektor zwischen dem Anfangspunkt und dem Endpunkt des Abschlusses dieser Geodätischen nennen wir *Holonomievektor* der Geodätischen γ .

Wählen wir eine Richtung auf der Translationsfläche bzw. in \mathbb{R}^2 aus und finden genügend geeignete Sattelverbindungen in diese Richtung bzw. Sattelverbindungen, deren Holonomievektoren diese Richtung haben, so können wir die Translationsfläche dadurch in Zylinder zerlegen.

Definition 1.35 (Zylinder, Zylinderzerlegung)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche.

- (i) Ein *Zylinder* in (X, ω) ist eine offene Teilmenge von X , die zu einem euklidischen Zylinder der Form $\mathbb{R}/k\mathbb{Z} \times (0, a)$ isometrisch ist. Dabei sind $a, k \in \mathbb{R}^+$ und wir nennen k den *Umfang* und a die *Höhe* des Zylinders.
- (ii) Der *Modulus* m eines Zylinders ist das Verhältnis von Umfang zu Höhe, also $m = \frac{k}{a}$.
- (iii) Die *Richtung* eines Zylinders ist definiert über die Richtung einer geschlossenen Geodätischen, die das Bild von $\mathbb{R}/k\mathbb{Z} \times \{b\}$ mit $b \in (0, a)$ ist.
- (iv) Die Menge der Zylinder auf einer Translationsfläche lässt sich durch die Teilmengebeziehung „ \subseteq “ partiell ordnen. In diesem Sinn wollen wir auch von *maximalen Zylindern* sprechen.
- (v) Eine *Zylinderzerlegung* von (X, ω) ist eine Menge von maximalen Zylindern in (X, ω) , so dass die Vereinigung der Abschlüsse der Zylinder X ist und zwei Zylinder jeweils disjunkt sind.

Dabei hat jeder Zylinder dieselbe Richtung und wir nennen das die *Richtung der Zylinderzerlegung*.

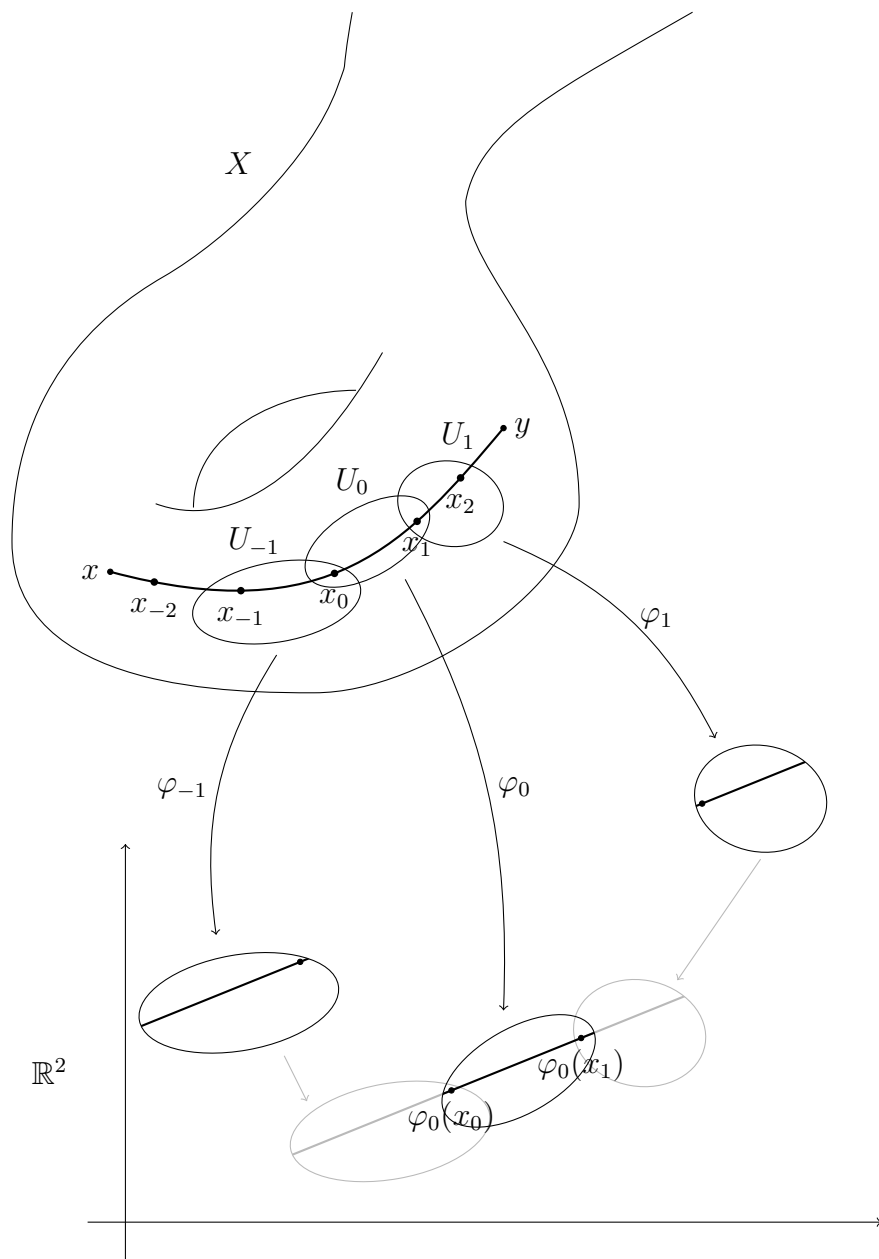


Abbildung 1.9: Bestimmung des Holonomievektors der Geodätischen von x nach y

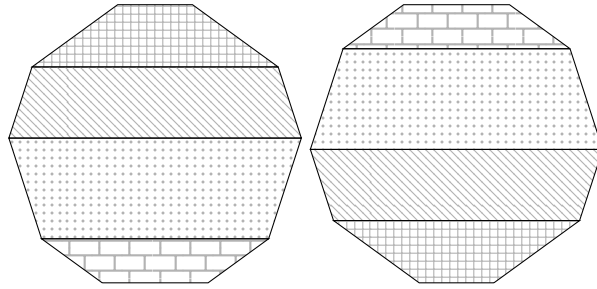


Abbildung 1.10: Zylinderzerlegung des halbregelmäßigen Doppel-Zehnecks

Beispiel 1.36 (Zylinderzerlegung des halbregelmäßigen Doppel-Zehnecks). Betrachte die Translationsfläche, die durch die (eindeutig bestimmte) Verklebung von zwei halbregelmäßigen Zehnecken entsteht. In Abbildung 1.10 ist eine mögliche Zylinderzerlegung dieser Translationsfläche angedeutet.

Beispiel 1.37 (Zylinderzerlegung der Chamanara-Fläche). Auch auf der Chamanara-Fläche aus Beispiel 1.30 gibt es Zylinderzerlegungen, eine davon ist in Abbildung 1.11 angedeutet. Diese Zerlegung besteht aus unendlich vielen Zylindern, die aber fast alle denselben Modulus haben.

In ähnlicher Weise wie in Abbildung 1.11 gibt es auf der Chamanara-Fläche Zylinderzerlegungen in unendlich viele weitere Richtungen.

Bemerkung 1.38 (Zylinderzerlegungen auf endlichen Translationsflächen). Ist (X, ω) eine endliche Translationsfläche, so kann eine Zylinderzerlegung von (X, ω) nur aus endlich vielen Zylindern bestehen. Denn gäbe es unendlich viele Zylinder, so könnte man diese zu einer offenen Überdeckung von \bar{X} ergänzen, in der kein Zylinder weggelassen werden kann. Das widerspräche aber der Kompaktheit von \bar{X} .

In Abschnitt 5.1 werden wir noch ein Kriterium kennenlernen, mit dem man bestimmen kann, ob und für welche Richtungen Zylinderzerlegungen auf einer endlichen Translationsflächen existieren.

Bemerkung 1.39 (Ränder von maximalen Zylindern). Dass ein maximaler Zylinder nicht mehr erweitert werden kann, liegt im Allgemeinen (d. h., wenn X kein Torus ist) daran, dass im Abschluss des Zylinders in \bar{X} eine Singularität liegt. Der Rand des Zylinders in \bar{X} besteht dann aus Singularitäten und Geodätischen dazwischen, also Sattelverbindungen.

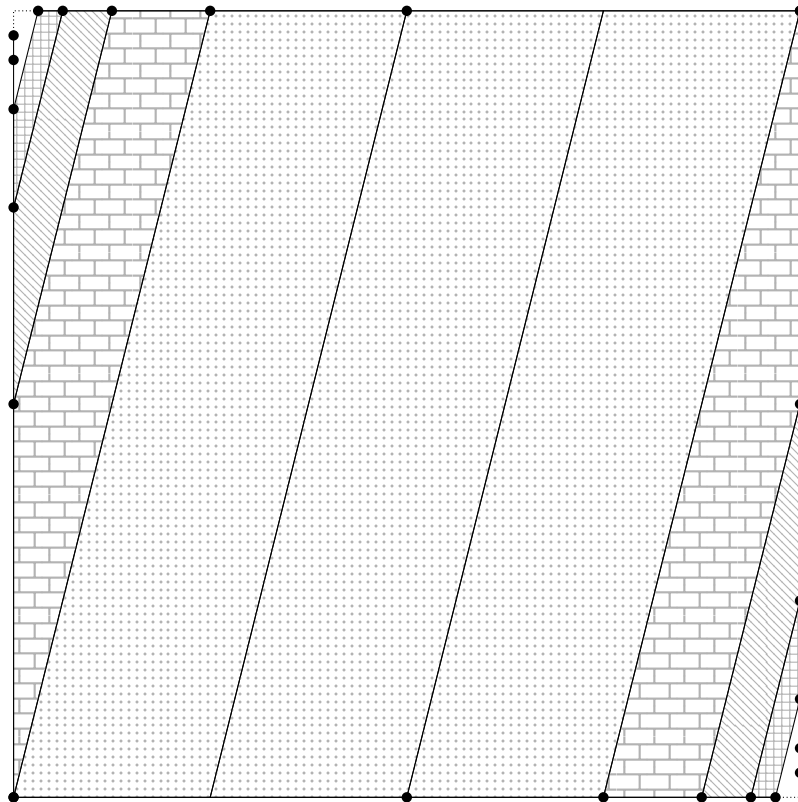


Abbildung 1.11: Zylinderzerlegung der Chamanara-Fläche

2 Singularitäten

Wir wollen nun lernen, Singularitäten zu klassifizieren. Eine Sorte, die uns sofort ins Auge fällt, sind solche Singularitäten, um die wir eine Karte finden, die verträglich mit dem maximalen Translationsatlas ist. So etwas haben wir beispielsweise schon beim Torus, der als verklebtes Quadrat beschrieben wird, und bei den zusätzlichen Singularitäten auf endlichen Translationsflächen nach Definition III gesehen.

Auch scheinen die Singularitäten von Veechs Doppel- n -Ecken sehr viel harmloser zu sein als die der Chamanara-Fläche. Wir wollen uns also in diesem Kapitel damit beschäftigen, wie wir diesen Unterschied beschreiben können. Die Ideen dazu stammen alle aus [BV13], insbesondere entspricht Abschnitt 2.1 etwa [BV13, Abschnitt 1] und Abschnitt 2.2 greift [BV13, Remark 1.9] und [BV13, Abschnitt 5.4] auf.

2.1 Raum der linearen Näherungen

Zunächst wollen wir alle möglichen „Richtungen“ betrachten, aus denen man sich einem Punkt in \overline{X} annähern kann. Dabei genügt es, wenn wir uns auf Geodätische beschränken und dabei auch nur auf solche, die sich „mit der gleichen Geschwindigkeit“ dem gewählten Punkt nähern, damit wir verschiedene Geodätische vergleichen können. Wir betrachten daher statt den Geodätischen die entsprechenden geodätischen Wege inklusive der zugehörigen Abbildungsvorschrift:

Definition 2.1 (Raum der linearen Näherungen)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche. Für $x \in \overline{X}$ und $\epsilon > 0$ definiere

$$\mathcal{L}^\epsilon(x) := \left\{ \gamma: (0, \epsilon) \rightarrow X : \gamma \text{ ist geodätischer Weg und } \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = x \right\}.$$

Um nicht abhängig von ϵ zu sein, betrachten wir für ein festes $x \in X$ simultan alle $\mathcal{L}^\epsilon(x)$. Dabei sollen $\gamma_1 \in \mathcal{L}^\epsilon(x)$ und $\gamma_2 \in \mathcal{L}^{\epsilon'}(x)$ äquivalent heißen, wenn $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ für alle $t \in (0, \min\{\epsilon, \epsilon'\})$ gilt. Der darüber definierte Raum

$$\mathcal{L}(x) := \left(\bigsqcup_{\epsilon > 0} \mathcal{L}^\epsilon(x) \right) / \sim$$

heißt *Raum der linearen Näherungen von x* und die Äquivalenzklasse $[\gamma]$ von $\gamma \in \mathcal{L}^\epsilon(x)$ heißt *lineare Näherung von x* .

Definition 2.2 (Metrik auf $\mathcal{L}(x)$)

Für $x \in X$ und $\epsilon > 0$ können wir auf $\mathcal{L}^\epsilon(x)$ die sogenannte *uniforme Metrik*

$$d_\epsilon(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{0 < t < \epsilon} d_X(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$$

definieren. Damit ist implizit auch eine Topologie auf $\mathcal{L}^\epsilon(x)$ gegeben.

Auf $\mathcal{L}(x)$ können wir deshalb die *Finaltopologie*¹ definieren: Das soll die feinste Topologie sein, so dass alle Einbettungen $\mathcal{L}^\epsilon(x) \rightarrow \mathcal{L}(x)$ stetig sind.

Definition 2.3 (Winkelsektor)

Betrachte die injektive Abbildung

$$f: \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}, z \mapsto (e^z, \operatorname{Im}(z)).$$

Ein *Winkelsektor* ist ein Tripel $(I, \epsilon, i_\epsilon)$, wobei I ein verallgemeinertes Intervall², $\epsilon > 0$ und i_ϵ eine isometrische Einbettung von

$$U := f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \log \epsilon, \operatorname{Im}(z) \in I\})$$

nach X ist (siehe Abbildung 2.1). Dabei trage U die Metrik, die wir durch Zurückziehen der Metrik von \mathbb{C} via der kanonischen Projektion $U \rightarrow B(0, \epsilon)$ erhalten. Für kleine Teilmengen $U' \subseteq U$ und $(e^z, \operatorname{Im}(z)), (e^{z'}, \operatorname{Im}(z')) \in U'$ gilt also:

$$d_U\left((e^z, \operatorname{Im}(z)), (e^{z'}, \operatorname{Im}(z'))\right) = d_{\mathbb{C}}(e^z, e^{z'}).$$

Bemerkung 2.4 (Basispunkt eines Winkelsektors). Für einen Winkelsektor $(I, \epsilon, i_\epsilon)$ und $y \in I$ ist

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (i_\epsilon \circ f)(x + iy)$$

ein Punkt in \overline{X} und unabhängig von y . Diesen Punkt nennen wir *Basispunkt* des Winkelsektors $(I, \epsilon, i_\epsilon)$.

Definition 2.5 (Drehkomponente)

Sei $x \in \overline{X}$ und $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \mathcal{L}(x)$. Dann heißen $[\gamma_1]$ und $[\gamma_2]$ äquivalent, wenn es Repräsentanten γ_1, γ_2 und einen Winkelsektor $(I, \epsilon, i_\epsilon)$ mit Basispunkt x gibt, so dass die Bilder von γ_1 und γ_2 in $i_\epsilon(U)$ liegen.

Eine Äquivalenzklasse $[\overline{\gamma}]$ von $[\gamma] \in \mathcal{L}(x)$ wird als *Drehkomponente* von $\mathcal{L}(x)$ bezeichnet.

Bemerkung 2.6 (Translationsstruktur auf Drehkomponenten). Sei $x \in \overline{X}$ und $[\overline{\gamma}]$ eine Drehkomponente von $\mathcal{L}(x)$. Für zwei lineare Näherungen in $[\overline{\gamma}]$, die vermöge eines Winkelsektors $(I, \epsilon, i_\epsilon)$ äquivalent sind, können wir

$$V(I, \epsilon, i_\epsilon) := \{(i_\epsilon \circ f)(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \log \epsilon, \operatorname{Im}(z) = y\}) : y \in I\}$$

¹auch direkte Limes-Topologie; die Finaltopologie verallgemeinert Konzepte wie Quotiententopologie und Summentopologie, sie ist dual zur Initialtopologie (siehe [Que01, Abschnitt 3C])

²d. h. $I = [a, b]$ mit $-\infty < a \leq b < \infty$ oder $I = (a, b]$ mit $-\infty \leq a < b < \infty$ oder $I = [a, b)$ mit $-\infty < a < b \leq \infty$ oder $I = (a, b)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$

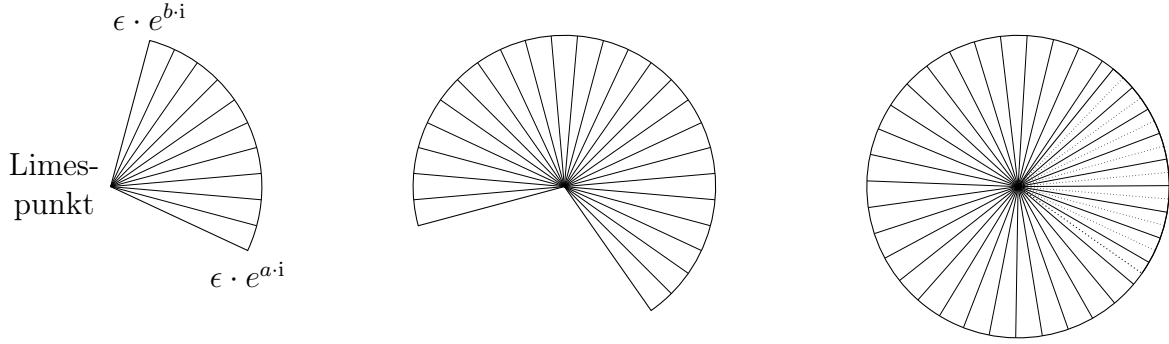


Abbildung 2.1: Beispiele für U bzw. $i_\epsilon(U)$ mit $I = [a, b]$

und

$$\varphi_{V(I, \epsilon, i_\epsilon)}: V(I, \epsilon, i_\epsilon) \rightarrow \mathbb{R}, (i_\epsilon \circ f) (\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \log \epsilon, \operatorname{Im}(z) = y\}) \mapsto y$$

definieren.

Man kann $V(I, \epsilon, i_\epsilon)$ als Teilmenge von $\overline{[\gamma]}$ auffassen, indem man die Elemente daraus mit den entsprechenden linearen Näherungen identifiziert. Wählen wir die Menge aller $V(I, \epsilon, i_\epsilon)$ als Basis, dann erhalten wir damit eine Topologie auf $\overline{[\gamma]}$. Jedes $\varphi_{V(I, \epsilon, i_\epsilon)}$ ist dann ein Homöomorphismus von $V(I, \epsilon, i_\epsilon)$ auf I und daher ist $\{(V(I, \epsilon, i_\epsilon), \varphi_{V(I, \epsilon, i_\epsilon)})\}$ ein Atlas auf $\overline{[\gamma]}$. Das definiert auf $\overline{[\gamma]}$ eine Struktur als 1-dimensionale Mannigfaltigkeit, genauer: eine Translationsstruktur, da die Kartenwechselabbildungen Translationen sind.

Bemerkung 2.7 (Länge von Drehkomponenten). Insbesondere können wir durch die Translationsstruktur auf $\overline{[\gamma]}$ die euklidische Metrik von \mathbb{R} auf $\overline{[\gamma]}$ zurückziehen und können dadurch die *Länge* von Drehkomponenten messen. Das formalisiert auch die Angabe eines „Winkels um eine Singularität“, die wir in Abschnitt 1.2 mehrfach verwendet haben.

In [BV13] wird weiterhin der Raum aller linearen Näherungen $\mathcal{L}(X)$ definiert und es werden einige Eigenschaften des Raums gezeigt, beispielsweise dass $\mathcal{L}(X)$ mit einer entsprechenden Topologie hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Außerdem gibt es eine Konstruktion, mit der man das Einheitstangentenbündel in $\mathcal{L}(X)$ wiederfinden kann. Eine dieser topologischen Eigenschaften werden wir im nächsten Abschnitt benötigen, daher führen wir sie abschließend hier auf:

Definition 2.8 (Funktion der maximalen Länge)

Auf $\mathcal{L}(x)$ definieren wir die *Funktion der maximalen Länge* $\ell: \mathcal{L}(x) \rightarrow (0, \infty]$ durch

$$\ell([\gamma]) = \sup \{ \epsilon > 0 : \gamma \in \mathcal{L}^\epsilon(x), \gamma \text{ Vertreter von } [\gamma] \}.$$

Proposition 2.9 (Halbstetigkeit der Funktion der maximalen Länge)

Die Funktion der maximalen Länge ℓ ist halbstetig von unten.

Beweis. In [BV13, Proposition 2.3] wird gezeigt, dass die Mengen

$$\{[\gamma] \in \mathcal{L}(x) : \gamma(s) \in B(x, r)\}$$

für alle $x \in X$ und $r, s > 0$ die Finaltopologie auf $\mathcal{L}(X)$ erzeugen. Also ist für alle $t \in \mathbb{R}$ die Menge $\ell^{-1}((t, \infty])$ offen in $\mathcal{L}(X)$ und damit $\ell: \mathcal{L}(X) \rightarrow (0, \infty]$ halbstetig von unten. \square

2.2 Klassifikation von Singularitäten

Definition 2.10 (Überlagerung)

Seien X und Y topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung. Dann heißt f *Überlagerung*, wenn es für jedes $y \in Y$ eine Umgebung $U \subseteq Y$ gibt, so dass $p^{-1}(U)$ aus der Vereinigung paarweise disjunkter Mengen $V_i \subseteq X$ besteht und $p|_{V_i}: V_i \rightarrow U$ jeweils ein Homöomorphismus ist.

Definition 2.11 (Translationsüberlagerung)

Seien (X, ω) und (Y, ν) zwei Translationsflächen und $p: X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, die sich stetig zu einer Abbildung $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$ fortsetzen lässt. Dann heißt p *Translationsüberlagerung*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ Karten $(U, \varphi) \in \omega$ und $(V, \psi) \in \nu$ mit $x \in U$ und $p(U) \subseteq V$ gibt, so dass für jedes $z \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(\psi \circ p \circ \varphi^{-1})(z) = z + t \text{ für ein festes } t \in \mathbb{R}^2.$$

Definition 2.12 (Typen von Singularitäten)

Eine Singularität σ einer Translationsfläche (X, ω) heißt

- (i) *hebbare Singularität* (englisch: flat point), wenn es eine Karte (U, φ) von $X \cup \{\sigma\}$ mit $\sigma \in U$ gibt, die mit dem Translationsatlas ω verträglich ist.
- (ii) *konische Singularität* (englisch: finite angle singularity, cone angle singularity), wenn ein $k > 1$, $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von σ in \overline{X} existieren, so dass es eine k -fache zyklische Translationsüberlagerung von $U \setminus \{\sigma\}$ auf die punktierte Kreisscheibe $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt. Die Zahl k heißt dabei *Vielfachheit* der Singularität.
- (iii) *helikale Singularität* (englisch: infinite angle singularity), wenn ein $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von σ in \overline{X} existieren, so dass es eine unendliche zyklische Translationsüberlagerung von $U \setminus \{\sigma\}$ auf die punktierte Kreisscheibe $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ gibt.
- (iv) *wilde Singularität* (englisch: wild singularity), wenn keine der ersten drei Beschreibungen zutrifft.

Definition 2.13 (Zahme Translationsfläche)

Eine *zahme Translationsfläche* ist eine Translationsfläche, die keine wilden Singularitäten hat.

Wir wollen nun diese Definitionen der verschiedenen Typen von Singularitäten in die Sprache der Drehkomponenten übersetzen. Der Vorteil wird dabei besonders bei der Beschreibung von wilden Singularitäten ersichtlich: Anstatt nur zu sagen, was eine solche Singularität nicht ist, können wir die Anzahl und jeweilige Länge der Drehkomponenten angeben und dadurch mehr Informationen kodieren.

Proposition 2.14 (Drehkomponenten und Typen von Singularitäten)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und σ eine Singularität von (X, ω) . Dann gilt:

- (i) Für $x \in X$ ist $\mathcal{L}(x)$ isometrisch zu $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
- (ii) σ ist eine hebbare Singularität $\Leftrightarrow \mathcal{L}(\sigma)$ ist isometrisch zu $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
- (iii) σ ist eine konische Singularität mit Vielfachheit $k \Leftrightarrow \mathcal{L}(\sigma)$ ist isometrisch zu $\mathbb{R}/2\pi k\mathbb{Z}$ mit $k > 1$.
- (iv) σ ist eine hebbare oder eine konische Singularität $\Leftrightarrow \mathcal{L}(\sigma)$ ist kompakt.
- (v) Ist σ eine helikale Singularität, dann ist $\mathcal{L}(\sigma)$ isometrisch zu \mathbb{R} . (Die Rückrichtung gilt nicht.)
- (vi) Hat $\mathcal{L}(\sigma)$ mehr als eine Drehkomponente, dann ist σ eine wilde Singularität. (Die Rückrichtung gilt nicht.)

Beweis. (i) Da es eine Karte $(U, \varphi) \in \omega$ gibt, so dass U eine Umgebung von x ist und $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Umgebung von $\varphi(x)$, ist die Aussage klar.

- (ii) Ist $\mathcal{L}(\sigma)$ nicht isometrisch zu $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, dann kann σ nach (i) keine hebbare Singularität sein. Ist $\mathcal{L}(\sigma)$ dagegen isometrisch zu $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, dann nimmt $\ell: \mathcal{L}(\sigma) \rightarrow (0, \infty]$ wegen der Halbstetigkeit von unten und der Kompaktheit von $\mathcal{L}(\sigma)$ sein Minimum an. Also gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass die Einbettung $\mathcal{L}^\epsilon(\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(\sigma)$ surjektiv ist. Daher ist $U := B(\sigma, \epsilon)$ in $X \cup \{\sigma\}$ enthalten. Weiterhin gibt es einen lokalen Homöomorphismus

$$\tilde{\varphi}: U \setminus \{\sigma\} \rightarrow B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$

der lokal auch verträglich mit den Kartenabbildungen von ω ist. Da die Länge der einzigen Drehkomponente von $\mathcal{L}(\sigma)$ aber 2π ist, ist $\tilde{\varphi}$ sogar injektiv und kann zu einem Homöomorphismus $\varphi: U \rightarrow B(0, \epsilon)$ mit $\varphi(\sigma) = 0$ fortgesetzt werden. Daher ist (U, φ) eine Karte, die verträglich mit ω ist.

- (iii) Sei σ konische Singularität mit Vielfachheit k und ϵ, U wie in der Definition von konischer Singularität. Dann liegen die Bilder von allen Elementen von $\mathcal{L}^\epsilon(\sigma)$ in $U \setminus \{\sigma\}$. Da $U \setminus \{\sigma\}$ eine Translationsüberlagerung von $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ ist, gibt es einen Winkelsektor $((0, 2\pi k), \epsilon, i_\epsilon)$ mit Basispunkt σ und $i_\epsilon(U_\epsilon) = \overline{U}$ für $U_\epsilon := f(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \log \epsilon, \operatorname{Im}(z) \in (0, 2\pi k)\})$. Also besitzt $\mathcal{L}(\sigma)$ genau eine Drehkomponente, die als eindimensionale Mannigfaltigkeit homöomorph zu S_1 ist und deren Länge $2\pi k$ beträgt.

Ist $\mathcal{L}(\sigma)$ isometrisch zu $\mathbb{R}/2\pi k\mathbb{Z}$, dann gibt es wie in (ii) eine Umgebung $U := B(\sigma, \epsilon) \subseteq X \cup \{\sigma\}$ und einen lokalen Homöomorphismus

$$\tilde{\varphi}: U \setminus \{\sigma\} \rightarrow B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Allerdings ist $\tilde{\varphi}$ hier nicht injektiv, aber lässt sich als k -fache zyklische Translationsüberlagerung von $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ auffassen. Also ist σ eine konische Singularität mit Vielfachheit k .

(iv) Ist σ eine hebbare oder eine konische Singularität, dann folgt aus (ii) und (iii), dass $\mathcal{L}(\sigma)$ kompakt ist. Ist umgekehrt $\mathcal{L}(\sigma)$ kompakt, dann folgt wie in (ii) und (iii), dass es ein $\epsilon > 0$ gibt mit $B(\sigma, \epsilon) \subseteq X \cup \{\sigma\}$. Da $B(\sigma, \epsilon) \setminus \{\sigma\}$ eine zusammenhängende Teilmenge einer Translationsfläche ist, kann mit Hilfe der Karten auch hier $B(\sigma, \epsilon) \setminus \{\sigma\}$ als Translationsüberlagerung von $B(0, \epsilon) \setminus \{0\}$ aufgefasst werden. Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{L}(\sigma)$ ist die Translationsüberlagerung endlich und damit σ eine hebbare oder konische Singularität.

(v) Sei σ eine helikale Singularität. Analog zu (iii) können wir die Umgebung U aus der Definition von helikaler Singularität nutzen, um die Existenz eines Winkelsektors mit einem verallgemeinerten Intervall, das weder nach oben noch nach unten beschränkt ist, zu zeigen. Daher hat auch hier $\mathcal{L}(\sigma)$ nur eine Drehkomponente und diese muss als nicht-kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit homöomorph zu \mathbb{R} sein. Insbesondere gibt es auch eine Isometrie $\mathcal{L}(\sigma) \rightarrow \mathbb{R}$.

Dass die Rückrichtung nicht gilt, sieht man an der wilden Singularität in Beispiel 2.23, deren Raum der linearen Näherungen ebenfalls isometrisch zu \mathbb{R} ist.

(vi) Die Aussage folgt aus (i), (ii), (iii) und (v). Um einzusehen, dass die Rückrichtung nicht gilt, können wir wieder die wilde Singularität in Beispiel 2.23 oder die wilde Singularität in Beispiel 2.22 betrachten, zu denen jeweils nur eine Drehkomponente gehört. \square

Proposition 2.15 (Singularitäten endlicher Translationsflächen)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche. Dann ist jede Singularität von (X, ω) hebbbar oder konisch.

Beweis. In Bemerkung 1.17 haben wir schon einmal festgehalten, dass der Winkel um eine Singularität $2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ beträgt, ohne genau zu beschreiben, wie man diesen Winkel misst. Aus Proposition 2.14 folgt dann die Aussage. \square

Satz 2 (Charakterisierung von endlichen Translationsflächen)

Eine Translationsfläche (X, ω) ist genau dann eine endliche Translationsfläche, wenn \overline{X} kompakt ist und $\mathcal{L}(x)$ kompakt ist für jedes $x \in \overline{X}$.

Beweis. Ist (X, ω) eine endliche Translationsfläche, dann ist \overline{X} nach Definition kompakt und jedes $\mathcal{L}(x)$ nach Proposition 2.15 und Proposition 2.14 kompakt.

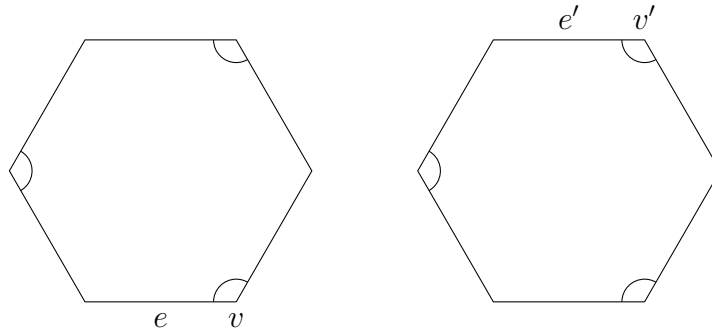


Abbildung 2.2: Veechs Doppel-Sechsecke, in denen eine Singularität markiert ist

Ist umgekehrt $\mathcal{L}(x)$ kompakt für jedes $x \in \overline{X}$, dann sind alle Singularitäten von (X, ω) hebbbar oder konisch. Da diese nach unserer Generalvoraussetzung diskret liegen, gibt es in \overline{X} um jede Singularität eine ϵ -Umgebung, in der keine weitere Singularität liegt. Aus der Kompaktheit von \overline{X} folgt dann, dass es nur endlich viele Singularitäten gibt. Außerdem können wir um jede hebbare und jede konische Singularität eine Karte finden, die mit ω (aufgefasst als komplexer Atlas, nicht als Translationsatlas) verträglich ist, so dass wir \overline{X} als kompakte Mannigfaltigkeit auffassen können. Damit erfüllt (X, ω) die Definition I von endlicher Translationsfläche. \square

2.3 Beispiele für Singularitäten

Beispiel 2.16 (Veechs Doppel- n -Ecke). Wir wollen die Singularitäten von Veechs Doppel- n -Ecken (siehe Beispiel 1.16) bestimmen. Dazu sei n fest und (X, ω) die entsprechende Translationsfläche. Wegen Proposition 2.15 ist jede Singularität hebbbar oder konisch.

Wir beginnen an der rechten Ecke v der unteren Kante e eines der n -Ecke. Die Kante e wird mit der oberen Kante e' des anderen n -Ecks identifiziert, also auch v mit der rechten Ecke v' von e' . Die bei v' an e' anliegende Kante wird mit der links an e anliegenden Kante identifiziert, also auch v mit der (im Uhrzeigersinn gesehen) übernächsten Ecke des ersten n -Ecks. Am besten lässt sich das an einer Skizze wie in Abbildung 2.2 nachvollziehen.

Da v mit jeder zweiten Ecke des ersten n -Ecks identifiziert wird (und analog mit jeder zweiten Ecke des zweiten n -Ecks), ist die Anzahl der Singularitäten abhängig von n : Bei geradem n gibt es zwei Singularitäten, bei ungeradem n nur eine.

Auch den Winkel um die Singularität können wir durch elementargeometrische Argumente bestimmen: Da die Innenwinkelsumme im n -Eck $\pi(n - 2)$ beträgt, haben bei geradem n beide Singularitäten einen Winkel von $2\pi \frac{n-2}{2}$, also ist die Vielfachheit der beiden Singularitäten jeweils $\frac{n-2}{2}$. Bei ungeradem n hat die einzige Singularität einen Winkel von $2\pi(n - 2)$ und damit die Vielfachheit $n - 2$. Insbesondere haben genau die Doppel-Dreiecke und Doppel-Vierecke hebbare Singularitäten.

Beispiel 2.17 (Zyklische Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$). Betrachte eine k -fache zyklische Translationsüberlagerung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Nach Definition 2.12 ist dann die einzige Singularität

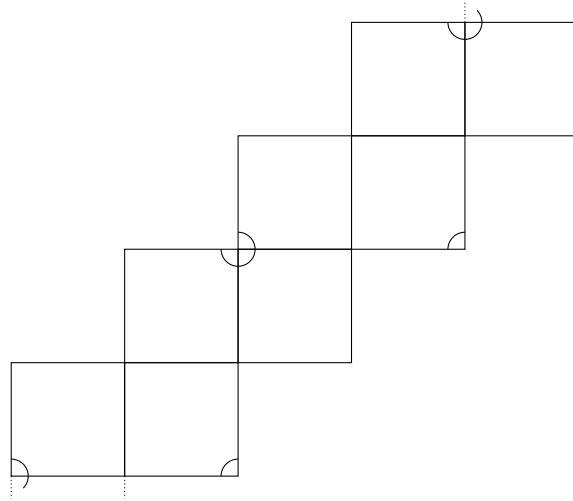


Abbildung 2.3: Unendliche Treppe: gegenüberliegende Seiten werden identifiziert

der Translationsfläche eine konische Singularität von Vielfachheit k . Entsprechend erhalten wir für $k = \infty$ eine helikale Singularität.

Beispiel 2.18 (Unendliche Treppe). Wir betrachten unendlich viele Kopien des Quadrats mit der Seitenlänge 1. Jeweils zwei Quadrate werden in horizontaler bzw. vertikaler Richtung miteinander verklebt wie in Abbildung 2.3.

Durch die Verklebung werden die Ecken der Quadrate zunächst zu vier verschiedenen Punkten identifiziert. Für ϵ mit $0 < \epsilon < 1$ gibt es von der ϵ -Umgebung eines solchen Punktes (ohne den Punkt selbst) eine unendliche zyklische Translationsüberlagerung auf $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Also hat die unendliche Treppe vier helikale Singularitäten.

Beispiel 2.19 (Chamanara-Fläche). Die Chamanara-Fläche hat überraschenderweise nur eine Singularität, wie wir in Beispiel 1.30 festgestellt haben. Beginnen wir mit einer linearen Näherung, die als Basispunkt das rechte obere Eck hat, dann erhalten wir eine zugehörige Drehkomponente, die unendlich lang ist. Beginnen wir dagegen mit der kanonischen linearen Näherung, die als Basispunkt das rechte untere Eck hat, so erhalten wir eine Drehkomponente, die nur $\frac{\pi}{2}$ lang ist. Hier (wie auch in den folgenden Beispielen) liegt es immer an einer Häufung der Punkte, die in \bar{X} identifiziert werden, wenn eine Drehkomponente als 1-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Translationsstruktur beschränkt, aber nicht abgeschlossen ist.

Es gibt aber noch weitere lineare Näherungen, die als Basispunkt das rechte untere Eck haben. Betrachte beispielsweise eine Geodätische, die in jedem Zylinder der in Beispiel 1.37 angedeuteten Zylinderzerlegung einmal „vertwistet“ wird. Da diese Geodätische endliche Länge hat, wird darüber eine lineare Näherung und damit eine Drehkomponente definiert. Diese ist verschieden von der oben beschriebenen kanonischen Drehkomponente, hat aber auch endliche Länge. Da wir auf diese Art zu jeder Zylinderzerlegung eine Drehkomponente erhalten, gibt es unendlich viele solche Drehkomponenten.

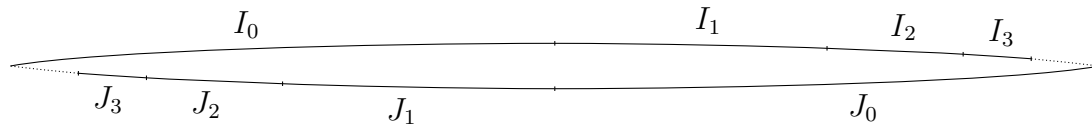


Abbildung 2.4: Fläche zur geometrischen Reihe: der Schlitz in \mathbb{R}^2 ist zur Verdeutlichung etwas auseinandergezogen

Für die linke obere und linke untere Ecke können wir analoge Beobachtungen wie für die rechte untere und rechte obere Ecke machen. Weiterhin ist jede lineare Näherung in einen der Endpunkte der Abschnitte (wie in der Konstruktion in Beispiel 1.30) äquivalent zu einer linearen Näherung, die als Basispunkt das rechte obere oder linke untere Eck hat. Also besitzt der Raum der linearen Näherungen um die Singularität genau zwei (in beide Richtungen) unendlich lange Drehkomponenten und unendlich viele Drehkomponenten von endlicher Länge. Wir werden auf diese Aussage nochmal in Korollar 4.47 zurückkommen.

Beispiel 2.20 (Fläche zur geometrischen Reihe). Betrachte eine Ebene, dargestellt als Kopie von \mathbb{R}^2 , mit einem Schlitz von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$. Halbiere jeweils die obere und die untere Seite des Schlitzes und identifiziere das linke obere Segment mit dem rechten unteren Segment. Halbiere jetzt jeweils das (nicht identifizierte) rechte obere und linke untere Segment wieder und identifiziere wie vorher. Verfahre jeweils mit den nicht identifizierten Segmenten so weiter (siehe Abbildung 2.4).

Wie bei der Chamanara-Fläche können wir begründen, dass diese Fläche nur eine Singularität hat. Der Raum der linearen Näherungen hat hier zwei Drehkomponenten und beide sind isometrisch zu $(0, \infty)$.

Beispiel 2.21 (Stern aus Kreissegmenten). Teile einen Kreis vom Radius 1 in vier gleich lange Segmente und ordne diese so in einer Ebene an, dass ein Stern mit Mittelpunkt $(0, 0)$ entsteht. Betrachte die Menge S der Schnittpunkte des Sterns mit den Geodätischen durch den Mittelpunkt in einem der Winkel $\{k \cdot \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2^n} : k \in \{0, \dots, 3\}, n \geq 2\}$. Die Punkte aus S verbinden wir nun entlang des Sterns und identifizieren jeweils die Bilder unter der Punktspiegelung am Mittelpunkt (siehe Abbildung 2.5).

Wie bei der Chamanara-Fläche kann man argumentieren, dass in \overline{X} alle Endpunkte der Sattelverbindungen miteinander identifiziert werden, also gibt es nur eine Singularität in (X, ω) . Deren Raum der linearen Näherungen hat mehrere Drehkomponenten, somit ist es eine wilde Singularität. Es gibt beispielsweise vier Drehkomponenten, die isometrisch zu \mathbb{R} sind, aber auch Drehkomponenten, deren Typ in den bisherigen Beispielen noch nicht vorkam: Betrachte die lineare Näherung, die durch $\gamma: (0, \epsilon) \rightarrow X, t \mapsto (1 - t, 0)$ definiert ist. Die zugehörige Drehkomponente besteht aus genau einem Element! Analoges gilt für die linearen Näherungen, die durch $\gamma: (0, \epsilon) \rightarrow X, t \mapsto (-1 + t, 0)$ bzw. $t \mapsto (0, 1 - t)$ bzw. $t \mapsto (0, -1 + t)$ definiert sind.

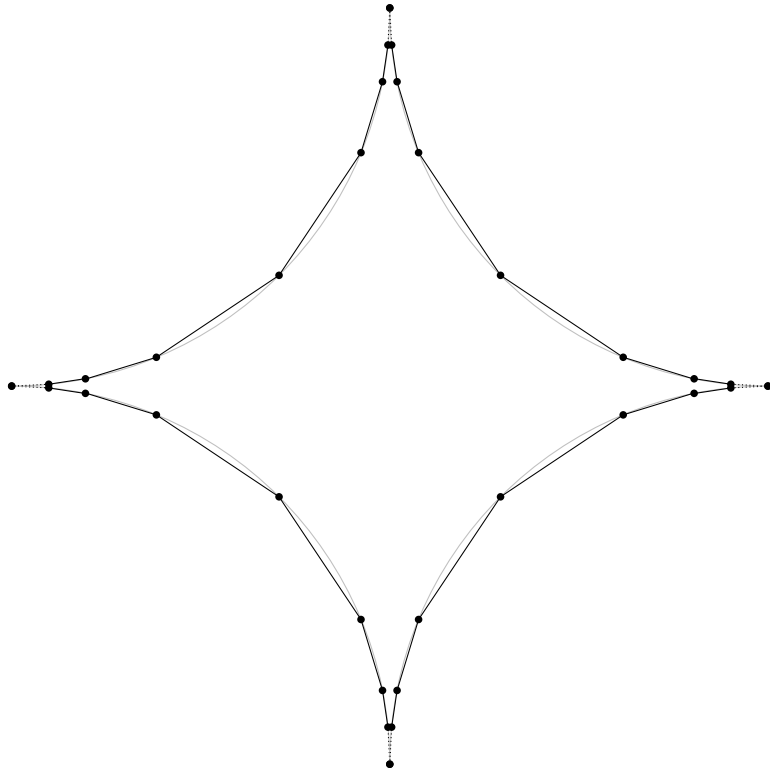


Abbildung 2.5: Stern aus Kreissegmenten

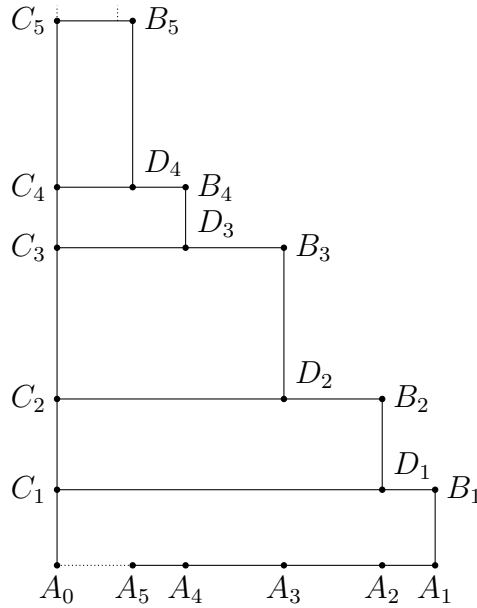


Abbildung 2.6: Kistenstapel: es werden A_0C_1 mit A_1B_1 und jeweils C_nC_{n+1} mit D_nB_{n+1} und A_nA_{n+1} mit B_nD_n durch Translationen identifiziert

Beispiel 2.22 (Kistenstapel). Wähle zwei Folgen $H = \{h_n\}$ und $B = \{b_n\}$ von positiven reellen Zahlen, so dass B zusätzlich streng fallend ist und gegen 0 konvergiert. Dann definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Rechteck R_n („Kiste“) mit Höhe h_n und Breite b_n und verkleben diese Rechtecke folgendermaßen: Identifiziere jeweils die rechte Seite von R_n mit der linken Seite von R_{n+1} . Weiterhin identifiziere die untere Seite von R_{n+1} mit dem linken Abschnitt der oberen Seite von R_n . Den rechten Abschnitt der oberen Seite von R_n verkleben wir mit einem passenden Abschnitt der unteren Seite von R_0 (siehe Beispiel in Abbildung 2.6).

Die entstehende Translationsfläche hat wieder nur eine Singularität. Deren Raum der linearen Näherungen hat genau eine Drehkomponente und diese ist isometrisch zu $(0, \infty)$. Um das einzusehen, kann man mit einer linearen Näherung beginnen, die sich in R_0 dem linken unteren Eck A_0 nähert. Drehen wir diese lineare Näherung gegen den Uhrzeigersinn um A_0 , erhalten wir lineare Näherungen, die sich entsprechend A_1 , dann $B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, \dots$ nähern. Dabei sieht man direkt auch, dass diese Singularität wild ist, denn wir können die lineare Näherung, mit der wir begonnen haben, nicht mit dem Uhrzeigersinn um A_0 drehen.

Das vorherige Beispiel wird von Joshua Bowman in [Bow12, Example 1] beschrieben. Er verwendet es hauptsächlich, um durch Betrachtung verschiedener Folgen H und B Gegenbeispiele zu Aussagen über bestimmte Endlichkeitsbedingungen zu konstruieren.

Beispiel 2.23 (Fläche zu harmonischer Reihe). Betrachte eine Kopie von \mathbb{R}^2 , in der die positive reelle Achse aufgeschlitzt wird. Unterteile die obere Seite des Schlitzes in folgende

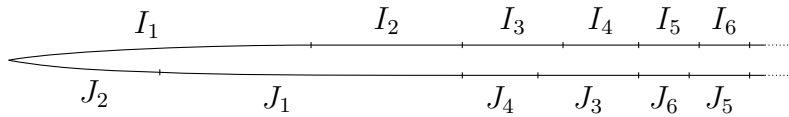


Abbildung 2.7: Fläche zur harmonischen Reihe: der Schlitz in \mathbb{R}^2 ist zur Verdeutlichung etwas auseinandergezogen

Segmente: I_n sei das Segment von $(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}, 0)$ bis $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, 0)$. Die untere Seite unterteilen wir wie folgt: Für gerades n sei J_n das Segment von $(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k}, 0)$ bis $(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}, 0)$, für ungerades n das Segment von $(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}, 0)$ bis $(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}, 0)$. Wir identifizieren jetzt für $n \in \mathbb{N}$ jeweils I_n mit J_n durch Translationen (siehe Abbildung 2.7).

Hier haben wir wieder nur eine Singularität mit genau einer Drehkomponente und diese ist isometrisch zu \mathbb{R} . Allerdings gibt es kein $\epsilon > 0$, so dass $B(0, \epsilon)$ in der Translationsfläche eine Umgebung von 0 wäre (in der Darstellung als aufgeschnittene Kopie von \mathbb{R}^2 liegen jeweils unendlich viele Vertreter der Singularität in einer ϵ -Umgebung). Damit gibt es keine Umgebung der Singularität, die eine Translationsüberlagerung von $B(0, \epsilon) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist. Also ist die Singularität wild.

3 Klassifikation von Flächen

Für Translationsflächen stellt sich wie für alle mathematischen Objekte die Frage, in welcher Art und Weise man sie unterscheiden und ob man sie sinnvoll in Klassen einteilen kann. Aus topologischer Sicht gibt es für zweidimensionale Mannigfaltigkeiten seit 1923 eine solche Klassifikation. In diesem Kapitel werden wir daher die für Translationsflächen interessanten Fälle daraus betrachten.

3.1 Klassifikation von kompakten Flächen

Definition 3.1 ((Einfach) geschlossene, nichttriviale und separierende Wege)
Sei X eine Fläche.

- (i) Ein *geschlossener Weg* in X ist eine stetige Abbildung $S^1 \rightarrow X$.
- (ii) Ein *einfach geschlossener Weg* in X ist eine injektive, stetige Abbildung $S^1 \rightarrow X$.
- (iii) Ein geschlossener Weg in X heißt *nichttrivial*, wenn er nicht homotop zu einem Punktweg ist.
- (iv) Ein einfach geschlossener Weg in einer zusammenhängenden Fläche X heißt *separierend*, wenn X ohne das Bild des Weges nicht mehr zusammenhängend ist.

Definition 3.2 (Geschlecht)

Sei X eine zusammenhängende Fläche. Das *Geschlecht* von X ist die maximale Anzahl nichttrivialer, disjunkter, einfach geschlossener Wege in X , so dass X ohne die Bilder dieser Wege immer noch zusammenhängend ist.

Bemerkung 3.3 (Weniger formale Definition von Geschlecht). Das Geschlecht einer Fläche wird etwas salopp auch gern als die Anzahl der „Löcher“ oder die Anzahl der „Henkel“ dieser Fläche beschrieben (siehe auch Abbildung 3.1). Als Anschauung sollte man das durchaus im Hinterkopf haben.

Beispiel 3.4 (Geschlecht der Sphäre und des Torus). (i) Eine 2-Sphäre (mit oder ohne Punktierungen) hat Geschlecht 0, da es keine einfach geschlossenen, nicht-separierenden Wege in der 2-Sphäre gibt.

- (ii) Ein Torus hat Geschlecht 1, da für jeden nichttrivialen, einfach geschlossenen, nicht-separierenden Weg der Torus ohne das Bild dieses Weges homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe in \mathbb{R}^2 ist und es in dieser keine einfach geschlossenen, nicht-separierenden Wege gibt.

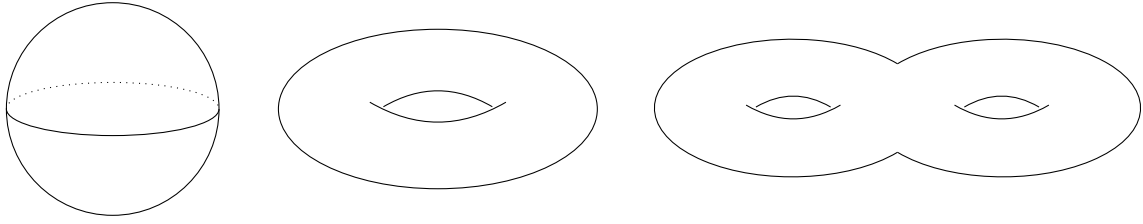


Abbildung 3.1: Beispiele für Flächen von Geschlecht 0, 1 und 2 (von links nach rechts)

Die nächste Definition scheint überflüssigerweise nur ein Synonym einzuführen. Lässt man jedoch auch Mannigfaltigkeiten mit Rand¹ zu, sieht man ein, dass in diesem Kontext die Definition tatsächlich eine Berechtigung hat. Da in der Literatur in den entsprechenden Definitionen und Aussagen aber immer von *geschlossenen Flächen* gesprochen wird, wollen wir das aus Konsistenzgründen auch so handhaben, obwohl „unsere“ Mannigfaltigkeiten nach Definition sowieso keinen Rand haben dürfen.

Definition 3.5 (Geschlossene Mannigfaltigkeit)

Eine *geschlossene Mannigfaltigkeit* ist eine kompakte Mannigfaltigkeit. (Werden auch Mannigfaltigkeiten mit Rand unter den Begriff Mannigfaltigkeit gefasst, dann ist eine *geschlossene Mannigfaltigkeit* eine kompakte Mannigfaltigkeit, deren Rand leer ist.)

Definition 3.6 (Zellzerlegung)

Sei X eine geschlossene n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

- (i) Eine k -Zelle in X ist eine abgeschlossene Teilmenge c von X , die zur Einheitskugel

$$B^k := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}$$

in \mathbb{R}^k homöomorph ist. Dabei heißt $k =: \dim(c)$ die *Dimension* der Zelle.

- (ii) Ist $c \subseteq X$ eine k -Zelle via dem Homöomorphismus $f: B^k \rightarrow c$, so heißt

$$f(\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| < 1\})$$

das *relative Innere* von c .

- (iii) Eine *Zellzerlegung* von X besteht aus Zellen $\{c_i\}_{i \in I}$, so dass $X = \bigcup_{i \in I} c_i$ gilt, das relative Innere von je zwei Zellen disjunkt ist und der Schnitt von je zwei k -Zellen die Vereinigung von endlich vielen Zellen von Dimension $k - 1$ ist.
- (iv) Eine Zellzerlegung heißt *endlich*, wenn sie aus endlich vielen Zellen besteht.

¹Eine (n -dimensionale) *Mannigfaltigkeit mit Rand* ist ein Hausdorffraum, der eine abzählbare Basis der Topologie besitzt und in dem jeder Punkt eine offene Umgebung hat, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des Halbraums $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ ist.

Bemerkung 3.7 (Existenz von endlichen Zellzerlegungen). Da „unsere“ Mannigfaltigkeiten nach Definition alle eine abzählbare Basis der Topologie besitzen, finden wir für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit jeweils abzählbar viele n -Zellen, die die Mannigfaltigkeit überdecken. Durch Schnitt dieser Zellen und einer Auswahl davon sowie der Wahl von passenden Zellen kleinerer Dimensionen erhalten wir eine Zellzerlegung. Ist eine Mannigfaltigkeit geschlossen, so folgt aus der Kompaktheit auf diese Weise, dass es sogar eine endliche Zellzerlegung gibt. Wie man das technisch ausführt, kann man für Flächen in [AS60] nachlesen. Beschränkt man sich auf geschlossene Flächen, so gibt es einen sehr kurzen Beweis in [DM68].

Definition 3.8 (Eulercharakteristik)

Sei X eine geschlossene Fläche mit einer endlichen Zellzerlegung $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$. Dann bezeichnen wir mit

$$\chi(X) := \sum_{i=1}^n (-1)^{\dim(c_i)}$$

die *Eulercharakteristik* von X .

Bemerkung 3.9 (Wohldefiniertheit der Eulercharakteristik). Besitzt X eine weitere endliche Zellzerlegung $\{c'_j\}_{j=1,\dots,m}$, so finden wir für $\{c_i\}_{i=1,\dots,n}$ und $\{c'_j\}_{j=1,\dots,m}$ eine gemeinsame Verfeinerung. Um zu zeigen, dass die Eulercharakteristik wohldefiniert ist, müssen wir uns also nur überlegen, dass jeder Verfeinerungsschritt einer Zellzerlegung von X die Eulercharakteristik von X nicht ändert. Das kann man sich anschaulich folgendermaßen klar machen: Für jede 0-Zelle, die im relativen Inneren einer 1-Zelle eingefügt wird, muss diese 1-Zelle durch zwei 1-Zellen ersetzt werden; ebenso werden für jede 0-Zelle, die im relativen Inneren einer 2-Zelle eingefügt wird, auch k 1-Zellen eingefügt und die 2-Zelle wird durch k 2-Zellen ersetzt (für ein $k \geq 2$); und so weiter. Durch Formalisierung von Argumenten dieser Art können wir die Wohldefiniertheit der Eulercharakteristik zeigen.

Wir wollen uns im Folgenden auf orientierbare Flächen beschränken, da bei Translationsflächen keine anderen Fälle auftreten können. Dafür benötigen wir zunächst eine formale Beschreibung der Orientierbarkeit:

Definition 3.10 (Orientierbare Fläche)

Sei X eine Fläche. Dann heißt X *orientierbar*, wenn es einen Atlas gibt, so dass die Jacobimatrizen² aller Kartenwechselabbildungen positive Determinante haben. Eine *Orientierung* von X ist die Wahl eines solchen Atlanten.

Translationsflächen sind also immer orientierbar und durch die Angabe der Translationsstruktur ist auch die Orientierung schon festgelegt. Allgemeiner gilt das auch für Riemannsche Flächen, wobei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen benötigt werden, um das einzusehen.

²Ist $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und existieren für die Koordinatenfunktionen f_1, \dots, f_m von f alle partiellen Ableitungen, dann ist die Jacobimatrix von f in einem Punkt a gegeben durch $(J_f(a))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$.

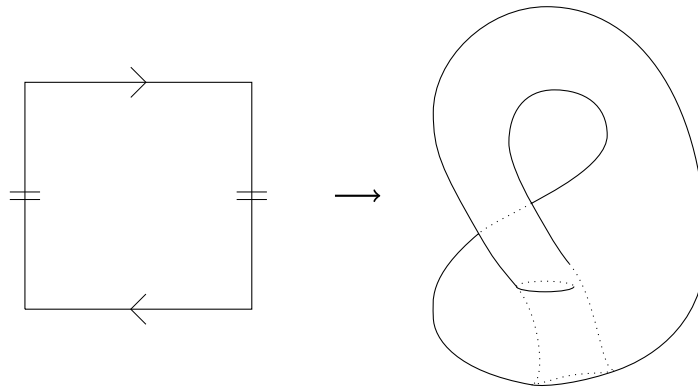


Abbildung 3.2: Eine Kleinsche Fläche kann beschrieben werden, indem ein Quadrat durch eine Translation und eine Gleitspiegelung verklebt wird.

Und wer sich unter einer nicht-orientierbaren Fläche nichts vorstellen kann, sollte sich einmal mit der Kleinschen Fläche (manchmal auch Kleinsche Flasche, siehe Abbildung 3.2) beschäftigen.

Satz 3 (Klassifikation von kompakten orientierbaren Flächen)

Zwei zusammenhängende, geschlossene, orientierbare Flächen sind genau dann homöomorph zueinander, wenn sie das gleiche Geschlecht haben.

Beweis. Das kann man zum Beispiel in [Ful97, Abschnitt 17a und 17b] nachlesen. Für den, der den Beweis noch nicht kennt, lohnt es sich, ihn genauer anzuschauen. Im Beweis wird eine gegebene Fläche trianguliert, also in Dreiecke zerlegt, und mit einem sogenannten Fundamentalpolygon in der Ebene mit gegebenen Verklebungen identifiziert. Das passt also sehr gut in unseren Kontext, insbesondere zur Definition II von endlichen Translationsflächen. □

Eine entsprechende Klassifikation gibt es auch für geschlossene, nicht-orientierbare Flächen, den Beweis dafür kann man in [Arm83, Kapitel 7] nachlesen. Dabei kommen dann die projektiven Flächen ins Spiel.

Korollar 3.11 (Zusammenhang von Geschlecht und Eulercharakteristik). Für eine zusammenhängende, orientierbare, geschlossene Fläche X gilt

$$\chi(X) = 2 - 2g.$$

Beweis. Das Fundamentalpolygon im Beweis von Satz 3 ist für eine Fläche von Geschlecht g ein $4g$ -Eck, von dem jeweils zwei Kanten und alle Ecken miteinander identifiziert werden. Durch Unterteilen des Fundamentalpolygons in genügend viele Dreiecke erhalten wir eine Zellzerlegung der entsprechenden Fläche und ihre Eulercharakteristik beträgt

$$1 - \frac{4g}{2} + 1 = 2 - 2g. \quad \square$$

Für einen planaren Graphen mit e Ecken, k Kanten und f „Flächen“ (inklusive der Fläche um den Graphen herum) ergibt sich daraus als Spezialfall die eulersche Polyederformel

$$e - k + f = 2.$$

Dazu werden die Ecken bzw. Kanten des Graphens als null- bzw. eindimensionale Zellen einer Zellzerlegung der 2-Sphäre angesehen.

Beispiel 3.12 (Veechs Doppel- n -Ecke). Die metrische Kompletierung des Doppel-Fünfecks aus Beispiel 1.16 kann dargestellt werden durch 1 Ecke (Singularität!), 5 Kanten und 2 Flächen. Damit beträgt die Eulercharakteristik -2 und das Geschlecht 2.

Allgemein ist die Eulercharakteristik der metrischen Kompletierung der Doppel- n -Ecke $4 - n$ für gerades n und $3 - n$ für ungerades n . Daraus folgt, dass das Geschlecht $\frac{n}{2} - 1$ für gerades n und $\frac{n-1}{2}$ für ungerades n ist.

Allgemein kann aus der Angabe der Singularitäten und ihrer Vielfachheiten schon darauf geschlossen werden, welches Geschlecht die Translationsfläche hat:

Proposition 3.13 (Zusammenhang von Geschlecht und Singularitäten)

Für eine endliche Translationsfläche (X, ω) von Geschlecht g und mit n konischen Singularitäten mit Vielfachheiten k_i , $i = 1, \dots, n$, gilt:

$$g = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_i - 1).$$

Beweis. Wir betrachten eine endliche Triangulierung von \overline{X} , in der jede Singularität $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ eine Ecke ist. Bezeichnen wir die Anzahl der Ecken mit e , die der Kanten mit k und die der Flächen mit f , dann gilt $k = \frac{3f}{2}$ und es folgt mit der Formel aus Korollar 3.11

$$2 - 2g = \chi(\overline{X}) = e - \frac{3f}{2} + f = e - \frac{f}{2}.$$

Wir betrachten nun die Summe der Innenwinkel der Dreiecke. Da es $e - n$ Ecken gibt, die keine Singularitäten sind, gilt

$$f \cdot \pi = k_1 \cdot 2\pi + \dots + k_n \cdot 2\pi + (e - n) \cdot 2\pi.$$

Daraus folgt $f = 2k_1 + \dots + 2k_n + 2(e - n)$ und damit

$$g = 1 - \frac{e}{2} + \frac{f}{4} = 1 + \frac{1}{2}(k_1 + \dots + k_n - n) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (k_i - 1). \quad \square$$

Beispiel 3.14 (Singularitäten von Translationsflächen von Geschlecht 1 und 2). Sehen wir von hebbaren Singularitäten ab, dann folgt aus Proposition 3.13 insbesondere, dass Translationsflächen von Geschlecht 1 keine Singularitäten haben und Translationsflächen von Geschlecht 2 entweder eine Singularität mit Vielfachheit 3 oder zwei Singularitäten, jeweils mit Vielfachheit 2, haben.

3.2 Klassifikation von nichtkompakten Flächen

Bei nichtkompakten Flächen gibt es erheblich mehr zu unterscheiden als das Geschlecht, denn hier können Flächen auftreten, die in verschiedene (sogar in verschieden viele) Richtungen unbeschränkt sind oder deren Geschlecht nicht beschränkt ist (wir sagen dann, dass diese Flächen unendliches Geschlecht haben). Dadurch können zwei Flächen mit gleichem Geschlecht sehr verschieden aussehen, insbesondere wenn beide unendliches Geschlecht haben. Diese Unterschiede wollen wir mit dem Begriff der Enden formalisieren.

Definition 3.15 (Ende eines topologischen Raums)

Sei X ein topologischer Raum.

- (i) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt *eigentlich*, wenn für jedes Kompaktum $K \subseteq Y$ gilt, dass $f^{-1}(K)$ kompakt ist.
- (ii) Eine eigentliche stetige Abbildung $r: [0, \infty) \rightarrow X$ heißt *eigentlicher Strahl* in X .
- (iii) Zwei eigentliche Strahlen r_1, r_2 in X heißen *äquivalent*, wenn es für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $r_1([n, \infty))$ und $r_2([n, \infty))$ in derselben Zusammenhangskomponente von $X \setminus K$ liegen.
- (iv) Für einen eigentlichen Strahl r in X bezeichnen wir seine Äquivalenzklasse mit $\text{end}(r)$.
- (v) Der *Raum der Enden* von X ist definiert als

$$\text{Ends}(X) := \{\text{end}(r) : r \text{ ist eigentlicher Strahl in } X\}.$$

Bemerkung 3.16 (Relation ist Äquivalenzrelation). Wir erhalten direkt aus der Definition der Relation in (iii), dass diese reflexiv und symmetrisch ist. Um zu zeigen, dass sie auch transitiv ist, wählen wir eigentliche Strahlen r_1, r_2, r_3 in X mit $r_1 \sim r_2$ und $r_2 \sim r_3$. Seien weiterhin $K \subseteq X$ ein Kompaktum und $n, n' \in \mathbb{N}$ so, dass jeweils $r_1([n, \infty))$ und $r_2([n, \infty))$ sowie $r_2([n', \infty))$ und $r_3([n', \infty))$ in derselben Zusammenhangskomponente von $X \setminus K$ liegen. Dann liegen für $n'' := \max\{n, n'\}$ auch $r_1([n'', \infty))$ und $r_3([n'', \infty))$ in derselben Zusammenhangskomponente (nämlich in der von $r_2([n'', \infty))$), weswegen $r_1 \sim r_3$ gilt.

Damit ist die in (iii) definierte Relation tatsächlich eine Äquivalenzrelation und es ist gerechtfertigt, von Äquivalenzklassen zu sprechen.

Beispiel 3.17 (Enden von kompakten Räumen, \mathbb{R} und \mathbb{R}^2). (i) Für jeden kompakten topologischen Raum X gilt $\text{Ends}(X) = \emptyset$, da es keine eigentlichen Strahlen in X gibt. Das folgt daraus, dass ein eigentlicher Strahl jedes Kompaktum verlässt.

- (ii) \mathbb{R} hat zwei Enden, denn:

$$r_+ : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t \quad \text{und} \quad r_- : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -t$$

sind zwei eigentliche Strahlen, die nicht dasselbe Ende definieren. Ist $r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ein weiterer eigentlicher Strahl, so ist $r^{-1}([-n, n])$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ kompakt, also gibt es insbesondere $T_n \in [0, \infty)$ mit $r^{-1}([-n, n]) \subseteq [0, T_n]$. Daher liegt $r([T_n, \infty))$ wegen der Stetigkeit von r komplett in (n, ∞) bzw. komplett in $(-\infty, -n)$. Wir zeigen noch, dass r äquivalent zu r_+ bzw. r_- ist: Ist $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Kompaktum, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq [-n, n]$ und für $T'_n := \max\{T_n, n\}$ liegen $r([T'_n, \infty))$ und $r_+([T'_n, \infty))$ bzw. $r_-([T'_n, \infty))$ in derselben Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R} \setminus K$. Also ist r zu r_+ bzw. zu r_- äquivalent und es gibt genau zwei Enden.

(iii) \mathbb{R}^2 hat ein Ende, denn: Der eigentliche Strahl

$$r: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, 0)$$

definiert ein Ende. Jeder andere eigentliche Strahl ist dazu äquivalent, da es für jedes Kompaktum $K \subseteq \mathbb{R}^2$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $K \subseteq B(0, n)$ gilt, und da $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist.

Bemerkung 3.18 (Punktierungen als Enden). Aus topologischer Sicht ist jede Punktierung auf einer Fläche X schon ein Ende, denn für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass die ϵ -Umgebung der Punktierung in \overline{X} disjunkt zu K ist. Dadurch lässt sich also ein eigentlicher Strahl definieren, der jedes Kompaktum verlässt und sich dieser Punktierung immer mehr nähert.

Ist X eine subkompakte Fläche, dann sind die Punktierungen auf X diskret und es gibt für je zwei Punktierungen auch ein Kompaktum $K \subseteq X$, so dass diese Punktierungen in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $\overline{X} \setminus K$ liegen. Daher definieren die entsprechenden Strahlen auch verschiedene Enden.

Analog dazu induziert auch jede Singularität auf einer Translationsfläche ein Ende. Bei endlichen Translationsflächen ist diese Zuordnung sogar eine Bijektion. Es kann allerdings bei helikalen oder wilden Singularitäten vorkommen, dass eigentliche Strahlen, die zu verschiedenen Singularitäten gehören, äquivalent sind (siehe Beispiel 3.19).

Beispiel 3.19 (Translationsfläche mit einem Ende und mehreren Singularitäten). Betrachte eine Kopie von \mathbb{R}^2 und wähle ein $N \in \mathbb{N}$. Schlitze für jedes $n \in \{1, \dots, N\}$ den horizontalen Strahl, der in $(0, n)$ beginnt, auf und unterteile ihn in Segmente wie in Beispiel 2.23 bei der Fläche zur harmonischen Reihe. Dadurch erhalten wir eine Translationsfläche (X, ω) mit N wilden Singularitäten. Für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ gilt jedoch, dass $X \setminus K$ nur eine Zusammenhangskomponente hat. Daher hat (X, ω) genau ein Ende.

Bemerkung 3.20 (Konvergenz in $\text{Ends}(X)$). Sei X ein topologischer Raum. Für eigentliche Strahlen r, r_1, r_2, \dots in X sagen wir, dass $(\text{end}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\text{end}(r)$ konvergiert, wenn es für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und Zahlen N_n ($n \geq n_0$) gibt, so dass $r_n([N_n, \infty))$ und $r([N_n, \infty))$ für $n \geq n_0$ in derselben Zusammenhangskomponente von $X \setminus K$ liegen.

Diese Konvergenz ist eindeutig, d. h. wenn es eigentliche Strahlen r, r' in X gibt, so dass $(\text{end}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\text{end}(r)$ und gegen $\text{end}(r')$ konvergiert, dann gilt $\text{end}(r) = \text{end}(r')$.

Bemerkung 3.21 (Topologie auf $\text{Ends}(X)$). Eine Teilmenge $A \subseteq \text{Ends}(X)$ nennen wir *abgeschlossen*, wenn für jede Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von eigentlichen Strahlen in X gilt: Konvergiert $(\text{end}(r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\text{end}(r)$ und gilt $\text{end}(r_1), \text{end}(r_2), \dots \in A$, so gilt auch $\text{end}(r) \in A$.

Dadurch können wir eine Topologie auf $\text{Ends}(X)$ definieren mit eben jenen abgeschlossenen Mengen.

Definition 3.22 (Planares Ende)

- (i) Eine zusammenhängende Fläche heißt *planar*, wenn sie orientierbar ist und jeder einfach geschlossene Weg schon separierend ist.
- (ii) Sei r ein eigentlicher Strahl in einer Fläche X . Dann heißt $\text{end}(r)$ *planar*, wenn es ein Kompaktum $K \subseteq X$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Zusammenhangskomponente von $r([n, \infty))$ in $X \setminus K$ planar ist.

Bemerkung 3.23 (Nicht-planare Enden). Anschaulich gesehen hat ein planares Ende bzw. die entsprechende planare Zusammenhangskomponente Geschlecht 0. Analog dazu sind nicht-planare Enden solche, für die die Anzahl der „Henkel“ nicht beschränkt ist. Hat eine Fläche endlich viele Enden, so muss es darunter auch nicht-planare Enden geben, damit die Fläche unendliches Geschlecht haben kann.

Der folgende Satz sagt uns nun, dass es genügt, die Enden einer Fläche und ihre Einteilung in planare und nicht-planare Enden zu betrachten, um den Homöomorphietyp der Fläche zu bestimmen:

Satz 4 (Klassifikation von orientierbaren Flächen)

Zwei zusammenhängende, orientierbare Flächen sind genau dann homöomorph zueinander, wenn sie das gleiche Geschlecht haben und die Räume der Enden sowie die Teilräume der nicht-planaren Enden jeweils zueinander homöomorph sind.

Beweis. Der Originalbeweis ist von 1923 und stammt aus [Ker23], einen übersichtlichen Beweis dafür gibt es in [Ric63]. Allerdings verwendet Richards wie schon Kérékjártó statt der Sprechweise, die wir eingeführt haben, Äquivalenzklassen von Randkomponenten (entspricht unseren Enden) und ideale Ränder (entspricht unserem Raum der Enden). Alle benötigten Begriffe werden jedoch dort eingeführt. □

Bemerkung 3.24 (Verallgemeinerungen und Spezialfälle von Satz 4). (i) Auch von diesem Satz gibt es wieder eine Version, die nicht-orientierbare Flächen miteinschließt. In diesem Fall muss analog zu den planaren Enden noch eine weitere Teilmenge der Enden betrachtet werden, deren Elemente in einem gewissen Sinn nicht-orientierbar sind. Der Beweis in [Ric63] behandelt die orientierbaren und nicht-orientierbaren Flächen gemeinsam.

- (ii) Da für kompakte Flächen der Raum der Enden immer leer ist, ist Satz 3 als Spezialfall in Satz 4 enthalten.

- (iii) Endliche Translationsflächen lassen sich mit Hilfe von Satz 3 klassifizieren, indem man die metrischen Komplettierungen betrachtet. Da diese für nicht-endliche Translationsflächen im Allgemeinen jedoch nicht kompakt bzw. keine Fläche ist, muss man für diese Translationsflächen Satz 4 zur Klassifikation verwenden. Dabei spielt eine Rolle, dass wie in Bemerkung 3.18 erläutert jede Singularität ein Ende induziert, wobei diese auch wie in Beispiel 3.19 gesehen zusammenfallen können.

In beiden Fällen reicht die Klassifikation aus Satz 3 bzw. Satz 4 aber nicht aus, um alle relevanten Informationen der Translationsfläche abzubilden. Beispielsweise ist durch die Angabe des Geschlechts und der Enden noch nicht festgelegt, welche Singularitäten eine Translationsfläche haben kann.

Als Ansatz einer Antwort auf die im letzten Punkt von Bemerkung 3.24 angesprochene Frage nach einer Klassifikation gibt es schon länger die Definition des *Stratums*, also des Raumes aller endlichen Translationsflächen mit einem gegebenen Geschlecht und mit konischen Singularitäten von gegebener Vielfachheit. Diese Klassifikation ist allerdings sehr grob, da Translationsflächen aus dem gleichen Stratum voneinander abweichende Eigenschaften haben können.

Eine feinere Klassifikation, die Translationsflächen nach allen relevanten Eigenschaften unterscheidet, kennt man jedoch bisher nur für endliche Translationsflächen von Geschlecht 2. Diese haben Curtis McMullen in [McM03] und Kariane Calta in [Cal04] unabhängig voneinander und mit verschiedenen Methoden erarbeitet.

Es bleiben also noch viele Fragen in diesem Bereich offen, auch und besonders für nicht-endliche Translationsflächen:

Forschungsfrage 3.25 (Klassifikation von Translationsflächen). Welche Möglichkeiten gibt es, um Translationsflächen zu klassifizieren? Welche Klassifikationen enthalten genügend Informationen über die Translationsflächen? Welche Informationen sollten in den Klassifikationen kodiert werden?

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir einige interessante Beispiele für nicht-kompakte, orientierbare Flächen kennenlernen und sie über das Geschlecht und den Raum ihrer Enden beschreiben.

Für die letzten beiden Beispiele ist insbesondere zu bemerken, dass diese Objekte trotz der überabzählbar vielen Enden eine abzählbare Basis der Topologie haben und damit tatsächlich Flächen in unserem Sinne sind. Alle Beispiele und insbesondere ihre Bezeichnungen stammen aus [Ghy95].

Beispiel 3.26 (Flächen von Geschlecht 0 oder ∞ mit einem oder zwei Enden).

- (i) Eine Fläche von Geschlecht 0 mit einem Ende ist homöomorph zu \mathbb{R}^2 .
- (ii) Eine Fläche von Geschlecht 0 mit zwei Enden ist homöomorph zu einem (unendlich langen) Zylinder.
- (iii) Eine Fläche von unendlichem Geschlecht mit einem Ende (das damit zwingend nicht-planar ist) heißt *Loch-Ness-Monster*.

- (iv) Eine Fläche von unendlichem Geschlecht mit zwei Enden, die beide nicht-planar sind, heißt *Jakobsleiter*.
- (v) Eine Fläche von Geschlecht 0 und mit überabzählbar vielen Enden wie in Abbildung 3.3 heißt *Cantorbaum*.
- (vi) Eine Fläche von unendlichem Geschlecht mit überabzählbar vielen Enden, die alle nicht-planar sind, wie in Abbildung 3.3 heißt *blühender Cantorbaum*.

Beispiel 3.27 (Homöomorphietyp einiger Beispiele). Die Chamanara-Fläche aus Beispiel 1.30, der Stern aus Kreissegmenten aus Beispiel 2.21, der Kistenstapel aus Beispiel 2.22 und die Fläche zur geometrischen bzw. harmonischen Reihe aus Beispiel 2.20 bzw. Beispiel 2.23 haben jeweils eine Singularität, also ein Ende. Weiterhin lässt sich anschaulich begründen, dass es auf jeder dieser Flächen unendlich viele nichttriviale, disjunkte, einfach geschlossene Wege gibt, so dass die Fläche ohne die Bilder dieser Wege immer noch zusammenhängend ist. Damit ist jede der genannten Flächen ein Loch-Ness-Monster.

Wir können nun also für eine Translationsfläche sowohl den Homöomorphietyp als auch ihre Singularitäten beschreiben. Wie immer stellt sich dann die Frage, ob es zwischen diesen Arten von Eigenschaften einen Zusammenhang gibt. Aus den bisher betrachteten Beispielen (insbesondere Beispiel 3.27) ergibt sich folgende Vermutung:

Forschungsfrage 3.28 (Zusammenhang zwischen Singularitäten und Geschlecht). Sei (X, ω) eine Translationsfläche mit endlichem Flächeninhalt und einer wilden Singularität. Folgt dann, dass X unendliches Geschlecht hat?

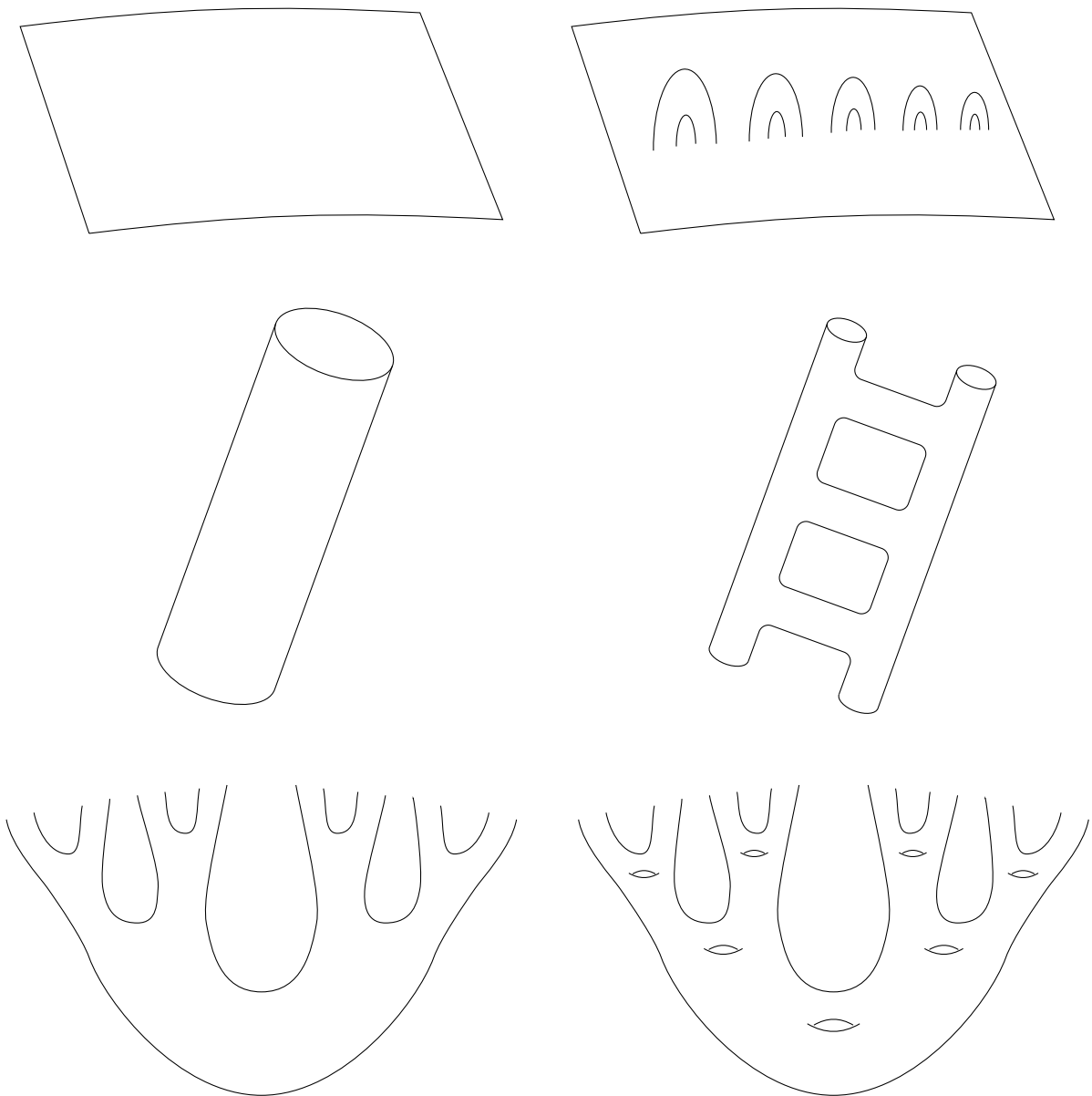


Abbildung 3.3: Skizzen für \mathbb{R}^2 , Loch-Ness-Monster, Zylinder, Jakobsleiter, Cantorbaum und blühenden Cantorbaum (von oben links nach unten rechts)

4 Veechgruppen

Die ersten Untersuchungen zu Veechgruppen finden sich im Artikel [Vee89] des Namensgebers William A. Veech. Er hat Veechgruppen über Abbildungen definiert, die in einem gewissen Sinn die Symmetrie einer Translationsfläche messen, um damit eine Aussage über das dynamische Verhalten von Translationsflächen treffen zu können. Diese Aussage werden wir in Abschnitt 5.2 noch kennenlernen.

Zunächst wurden Veechgruppen hauptsächlich wegen den Verbindungen zu anderen Bereichen wie dynamischen Systemen oder auch Teichmüllertheorie untersucht, doch beim Aufbau einer Theorie über Veechgruppen sind auch viele zusätzliche Fragen entstanden. So sind auch Methoden für die Bestimmung von Veechgruppen und Aussagen über ihre Eigenschaften für die Forschung interessant.

In diesem Kapitel wollen wir aus technischen Gründen nur Translationsflächen ohne hebbare Singularitäten betrachten.

4.1 Definition Veechgruppe

Zunächst wollen wir einige interessante Klassen von Abbildungen kennenlernen, über die wir dann die Veechgruppe definieren werden.

Definition 4.1 (Translationen, affine Abbildungen)

Sei $f: (X, \omega) \rightarrow (Y, \nu)$ eine stetige Abbildung zwischen zwei Translationsflächen.

- (i) Die Abbildung f heißt *orientierungserhaltend*, wenn für je zwei Karten $(U, \varphi) \in \omega$ und $(V, \psi) \in \nu$ mit $f(U) \subseteq V$ gilt, dass die Jacobimatrix von

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

existiert und positive Determinante hat. f heißt *orientierungsumkehrend*, wenn die entsprechenden Jacobimatrizen negative Determinante haben.

- (ii) Die Abbildung f heißt *Translation*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ Karten $(U, \varphi) \in \omega$ und $(V, \psi) \in \nu$ mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$ gibt, so dass für jedes $z \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = z + t \text{ für ein } t \in \mathbb{R}^2.$$

- (iii) Die *Translationsgruppe* $\text{Trans}(X, \omega)$ einer Translationsfläche (X, ω) ist die Gruppe der bijektiven Translationen von (X, ω) .

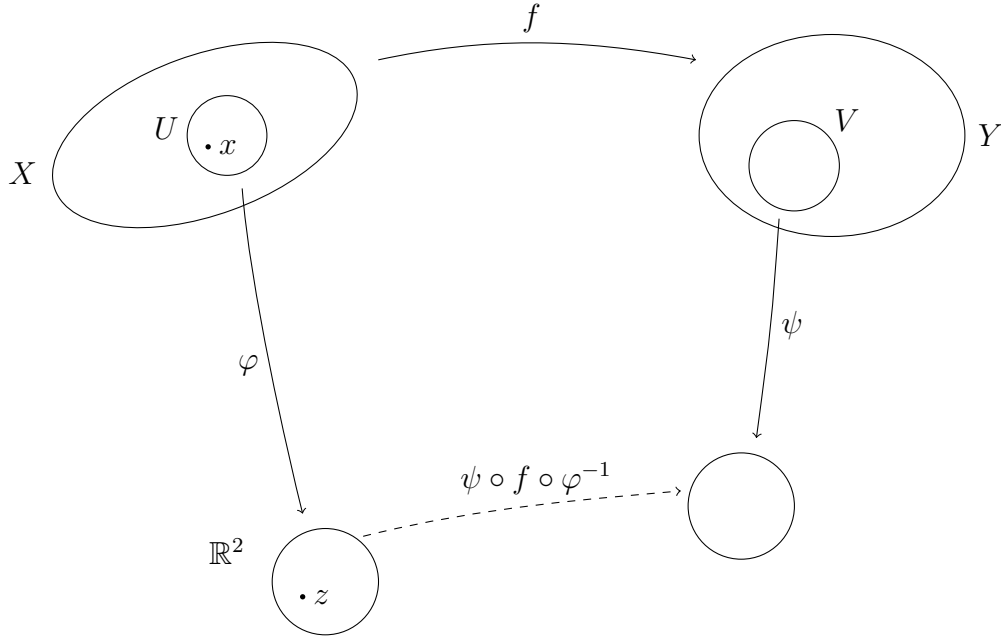


Abbildung 4.1: Eigenschaften von f werden durch Eigenschaften von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ definiert

- (iv) Die Abbildung f heißt *affin*, wenn es für jeden Punkt $x \in X$ Karten $(U, \varphi) \in \omega$ und $(V, \psi) \in \nu$ mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$ gibt, so dass für jedes $z \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^2$ gilt:

$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) = A \cdot z + t \text{ für ein } A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \text{ und ein } t \in \mathbb{R}^2.$$

- (v) Die *affine Gruppe* $\text{Aff}^+(X, \omega)$ einer Translationsfläche (X, ω) ist definiert durch

$$\text{Aff}^+(X, \omega) := \{f: X \rightarrow X : f \text{ ist orientierungserhaltender Homöomorphismus und affin bezüglich } \omega\}.$$

Proposition 4.2 (Globales Verhalten von affinen Abbildungen)

Ist $f: (X, \omega) \rightarrow (Y, \nu)$ eine affine Abbildung, so ist die Matrix A aus (iv) für jede Wahl von $x \in X$ und jede Wahl von $(U, \varphi) \in \omega$ und $(V, \psi) \in \nu$ dieselbe.

Beweis. Seien $(U, \varphi), (U', \varphi') \in \omega$ und $(V, \psi), (V', \psi') \in \nu$ wie in (iv) und so, dass $U \cap U' \neq \emptyset$ gilt. Dann gilt für jedes $z \in \varphi(U \cap U')$:

$$\begin{aligned} A \cdot z + t &= (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(z) \\ &= ((\psi \circ \psi'^{-1}) \circ \psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} \circ (\varphi' \circ \varphi^{-1}))(z) \\ &= ((\psi \circ \psi'^{-1}) \circ \psi' \circ f \circ \varphi'^{-1})(z + t_1) \\ &= (\psi \circ \psi'^{-1})(A' \cdot z + A' \cdot t_1 + t') \\ &= A' \cdot z + A' \cdot t_1 + t' + t_2 \end{aligned}$$

Da $z \in \varphi(U \cap U')$ beliebig war und $A' \cdot t_1 + t' + t_2 - t$ konstant ist, gilt $A = A'$.

Sind jetzt $x, x' \in X$ gegeben, dann gibt es einen Weg von x nach x' und damit auch eine endliche Folge von geeigneten offenen Mengen $U =: U_1, \dots, U_n := U'$ mit $x \in U$ und $x' \in U'$, die diesen Weg überdecken. Wähle $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n - 1$. Dann lässt sich das Argument von oben wiederholt anwenden und die Behauptung ist damit gezeigt. \square

Definition 4.3 (Ableitung)

- (i) Ist $f: (X, \omega) \rightarrow (Y, \nu)$ eine affine Abbildung, so heißt die Matrix A *Ableitung* (engl. derivation) von f .
- (ii) Der Gruppenhomomorphismus $\text{der}: \text{Aff}^+(X, \omega) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$, der jedem affinen orientierungserhaltenden Homöomorphismus seine Ableitung zuordnet, heißt *Ableitungsabbildung*.

Bemerkung 4.4 (Bild der Ableitungsabbildung). Ist $f \in \text{Aff}^+(X, \omega)$, dann ist die Ableitung von f genau die Jacobimatrix von $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ für jede geeignete Wahl von Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \omega$. Da f orientierungserhaltend ist, ist das Bild der Ableitungsabbildung insbesondere eine Untergruppe von $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$.

Für eine Translationsfläche mit endlichem Flächeninhalt muss $f \in \text{Aff}^+(X, \omega)$ zusätzlich volumenerhaltend sein, also $\text{der}(f)$ Determinante 1 haben und damit ist das Bild der Ableitungsabbildung sogar in $\text{SL}(2, \mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ enthalten.

Bemerkung 4.5 (Ableitung von Translationen). Eine stetige Abbildung ist genau dann eine Translation, wenn sie affin ist und ihre Ableitung die Identität ist. Insbesondere ist also $\text{Trans}(X, \omega) \subseteq \text{Aff}^+(X, \omega)$ und sogar $\text{Trans}(X, \omega)$ der Kern von $\text{der}: \text{Aff}^+(X, \omega) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$.

Definition 4.6 (Veechgruppe)

Für eine Translationsfläche (X, ω) bezeichnen wir das Bild der Ableitungsabbildung in $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ mit *Veechgruppe* von (X, ω) und schreiben dafür $\text{GL}^+(X, \omega)$.

Definition 4.7 (Projektive, erweiterte und projektive erweiterte Veechgruppe)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche.

- (i) Der Gruppenhomomorphismus $\text{der}: \text{Aff}^+(X, \omega) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ lässt sich auf die Gruppe aller affinen Homöomorphismen $\text{Aff}(X, \omega)$ fortsetzen. Das Bild dieser neuen Abbildung $\text{der}^\pm: \text{Aff}(X, \omega) \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{R})$ heißt *erweiterte Veechgruppe* von (X, ω) und wird mit $\text{GL}(X, \omega)$ bezeichnet.
- (ii) Die *projektive Veechgruppe* $\text{PGL}^+(X, \omega)$ ist das Bild der Veechgruppe unter der kanonischen Projektion $\text{GL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R}) := \text{GL}(2, \mathbb{R}) / \{r \cdot I : r \in \mathbb{R}^\times\}$.
- (iii) Die *projektive erweiterte Veechgruppe* $\text{PGL}(X, \omega)$ ist das Bild der erweiterten Veechgruppe unter der kanonischen Projektion $\text{GL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

In der Literatur wird je nach Autor manchmal auch die projektive oder die erweiterte Veechgruppe als *die* Veechgruppe definiert.

Beispiel 4.8 (Veechgruppe von \mathbb{C}). Wie wir in Beispiel 1.29 gesehen haben, ist $(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ eine Translationsfläche. Dabei ist \mathbb{C} die komplexe Ebene und $\omega_{\mathbb{C}}$ die Translationsstruktur, die durch Karten der Form $(U, (z \mapsto (\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z)))$ für offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$ definiert wird.

Identifiziert man \mathbb{C} auf kanonische Weise mit \mathbb{R}^2 , dann kann man eine orientierungserhaltende affine Abbildung $f: (\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ global beschreiben durch $f(x) = A \cdot x + t$ für ein $A \in \operatorname{GL}^+(2, \mathbb{R})$ und ein $t \in \mathbb{R}^2$. Also ist die Veechgruppe von $(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ ganz $\operatorname{GL}^+(2, \mathbb{R})$.

Beispiel 4.9 (Veechgruppe eines Torus). Um die Veechgruppe einer Translationsfläche (T, ω) zu bestimmen, die topologisch ein Torus ist, wollen wir uns (T, ω) als verklebtes Parallelogramm vorstellen, bei dem die Ecken zur Fläche dazugehören. Die Kanten des Parallelogramms seien gegeben durch die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Da diese linear unabhängig sein müssen, gilt $B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{R})$. Dann ist T biholomorph äquivalent¹ zu \mathbb{C}/Λ_B für ein Gitter $\Lambda_B := (a + ic)\mathbb{Z} + (b + id)\mathbb{Z}$.

Jedes Element der affinen Gruppe von (T, ω) kommt (bis auf Translation) von einem orientierungserhaltenden affinen Homöomorphismus von \mathbb{C} her, der das Gitter Λ_B erhält. Für ein $f \in \operatorname{Aff}^+(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ mit $\operatorname{der}(f) = A$ muss es also für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ auch $n', m' \in \mathbb{Z}$ geben mit

$$A \cdot \left(n \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right) = n' \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + m' \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix},$$

damit die induzierte Abbildung $\tilde{f}: T \rightarrow T$ Element von $\operatorname{Aff}^+(T, \omega)$ ist. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$AB \cdot \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} n' \\ m' \end{pmatrix}$$

und damit folgt $B^{-1}AB \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{Z})$. Da alle Elemente von $\operatorname{GL}(2, \mathbb{Z})$ Determinante 1 oder -1 haben und A positive Determinante hat, gilt $B^{-1}AB \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z})$. Insgesamt folgt also

$$\operatorname{GL}^+(T, \omega) = B \cdot \operatorname{SL}(2, \mathbb{Z}) \cdot B^{-1}.$$

Bemerkung 4.10 (Veechgruppe eines Zylinders). Sei (Z, ω) ein (unendlich langer) Zylinder. Dann gibt es analog zum Fall des Torus einen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$, so dass $\mathbb{C}/v\mathbb{Z}$ biholomorph äquivalent zu Z ist.

Wieder kommt jedes Element von $\operatorname{Aff}^+(Z, \omega)$ von einem Element in $\operatorname{Aff}^+(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ her, das $v\mathbb{Z}$ erhält. Für ein $A \in \operatorname{GL}^+(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}}) = \operatorname{GL}^+(2, \mathbb{R})$ muss es also ein $n \in \mathbb{Z}$ geben mit

$$A \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

¹Zwei Riemannsche Flächen heißen *biholomorph äquivalent*, wenn es zwischen ihnen eine biholomorphe Abbildung gibt. Dabei ist Holomorphie von Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen so zu verstehen wie in Definition 1.20.

damit auch $A \in \text{GL}^+(Z, \omega)$ gilt. Da allerdings mit A auch A^{-1} Element der Veechgruppe ist und damit $n^{-1} \in \mathbb{Z}$ sein muss, ist $n \in \{\pm 1\}$.

Um unschöne Rechnungen zu vermeiden, wollen wir für die konkrete Bestimmung der Veechgruppe vorerst annehmen, dass der Zylinder vertikal ist, also dass $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $v_1 \neq 0$ gilt. Dann folgt aus der vorigen Gleichung, dass die erste Spalte von A schon $\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sein muss. Weitere Forderungen an die affinen Abbildungen auf (Z, ω) gibt es nicht, so dass für den Fall eines vertikalen Zylinders gilt:

$$\text{GL}^+(X, \omega) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+ \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -s \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Wie wir damit die Veechgruppe eines Zylinders, der nicht vertikal ist, bestimmen können, werden wir in Proposition 4.16 erfahren.

Beispiel 4.11 (Veechgruppe von Veechs Doppel- n -Ecken). Für die Doppel- n -Ecke (X_n, ω_n) ist es etwas aufwändiger, die Veechgruppe zu bestimmen, weshalb wir hier auf Beweise verzichten wollen. Wir müssen hierbei nicht nur danach unterscheiden, ob n gerade oder ungerade ist, sondern auch die Fälle, in denen (X_n, ω_n) hebbare Singularitäten hat, ausschließen. Es gilt für n ungerade, $n \geq 5$:

$$\text{GL}^+(X_n, \omega_n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Dass die beiden erzeugenden Matrizen in der Veechgruppe liegen, lässt sich durch geometrische Argumente einsehen: Die erste Matrix ist die Ableitung einer Scherung in horizontaler Richtung (um den Modulus der Zylinder der horizontalen Zylinderzerlegung) und die zweite Matrix ist die Ableitung einer Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ nach Vertauschen der n -Ecke. Warum von diesen beiden Elementen schon die ganze Veechgruppe erzeugt wird, kann man in [Fre08, Abschnitt 7.2] nachlesen.

Für n gerade, $n \geq 6$ gilt dagegen:

$$\text{GL}^+(X_n, \omega_n) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \cot \frac{\pi}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Eine Inklusion lässt sich wie oben durch geometrische Argumente einsehen, für die andere kann man den Beweis in etwas allgemeinerer Form und mit anderen Erzeugern der Veechgruppe in [Ran11, Kapitel 5] nachlesen.

Bemerkung 4.12 (Aktion von $\text{GL}(2, \mathbb{R})$). Für eine Translationsfläche (X, ω) können wir die Translationsstruktur ω durch $B \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ folgendermaßen verändern: Für jede Karte $(U, \varphi) \in \omega$ mit $\varphi: U \rightarrow V$ definieren wir eine neue Karte $(U, B \cdot \varphi)$ mit

$$B \cdot \varphi: U \rightarrow B \cdot V, z \mapsto B \cdot \varphi(z).$$

Über diese Karten können wir einen weiteren Atlas bzw. eine weitere Translationsstruktur auf X definieren, diese heiße $B \cdot \omega$. Da $(X, B \cdot \omega)$ dann ebenfalls eine Translationsfläche ist, erhalten wir dadurch eine Aktion von $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ auf der Menge der Translationsstrukturen auf X .

Die gerade beschriebene Aktion verändert zwar die Translationsstruktur auf der Fläche, aber nur auf geringfügige Weise, wie wir gleich sehen werden. Wir wollen zunächst definieren, was wir unter einem Isomorphismus zwischen Translationsflächen verstehen und werden dann zeigen, dass die Aktion von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ die Isomorphieklasse einer Translationsfläche nicht ändert.

Definition 4.13 (Isomorphie von Translationsflächen)

Zwei Translationsflächen heißen *isomorph*, wenn es eine bijektive Translation zwischen ihnen gibt.

Obwohl es intuitiv naheliegend wäre, ist im Allgemeinen die Identität für den Nachweis der Isomorphie von zwei Translationsflächen (X, ω) und (X, ω') die falsche Wahl. Deren Ableitung muss nämlich nicht die Einheitsmatrix sein:

Beispiel 4.14 (Isomorphismus zwischen Translationsflächen). Für $B \in \mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ ist die Abbildung $\mathrm{id}: (\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}, B \cdot \omega_{\mathbb{C}})$ keine Translation, denn es gilt $\mathrm{der}(\mathrm{id}) = B$. Aber für die Abbildung

$$f_{B^{-1}}: (\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}, B \cdot \omega_{\mathbb{C}}), z \mapsto B^{-1} \cdot z$$

gilt $\mathrm{der}(f_{B^{-1}}) = I$, also ist $f_{B^{-1}}$ eine bijektive Translation und $(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ und $(\mathbb{C}, B \cdot \omega_{\mathbb{C}})$ sind isomorph.

Allgemeiner gilt:

Bemerkung 4.15 (Veechgruppe operiert trivial auf den Translationsstrukturen). Ist (X, ω) eine Translationsfläche und $B \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$, dann gilt auch $B^{-1} \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$ und es gibt ein $f \in \mathrm{Aff}^+(X, \omega)$ mit $\mathrm{der}(f) = B^{-1}$. Die darüber definierte Abbildung

$$f_{B^{-1}}: (X, \omega) \rightarrow (X, B \cdot \omega), x \mapsto f(x)$$

ist eine Translation und deshalb gilt $(X, B \cdot \omega) \cong (X, \omega)$.

Proposition 4.16 (Veechgruppen unter der Aktion von $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche, $B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ und $(X, B \cdot \omega)$ wie in Bemerkung 4.12 beschrieben. Dann ist

$$\mathrm{GL}^+(X, B \cdot \omega) = B \cdot \mathrm{GL}^+(X, \omega) \cdot B^{-1}.$$

Beweis. Sei $A \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$, das heißt, es gibt einen orientierungserhaltenden affinen Homöomorphismus $f: X \rightarrow X$, so dass für je zwei Karten $(U, \varphi), (V, \psi) \in \omega$ mit $f(U) \subseteq V$ gilt: $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = A \cdot z + t$ für ein $t \in \mathbb{R}^2$. Dann sind $(U, B \cdot \varphi), (V, B \cdot \psi) \in B \cdot \omega$ zwei Karten mit

$$\begin{aligned} ((B \cdot \psi) \circ f \circ (B \cdot \varphi)^{-1})(z) &= ((B \cdot \psi) \circ f)(\varphi^{-1}(B^{-1} \cdot z)) \\ &= B \cdot (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(B^{-1} \cdot z) \\ &= B \cdot (A B^{-1} \cdot z + t) \\ &= B A B^{-1} \cdot z + B \cdot t. \end{aligned}$$

Da es für jeden Punkt $x \in X$ entsprechende Karten $(U, B \cdot \varphi)$ und $(V, B \cdot \psi)$ gibt, ist f auch ein affiner Homöomorphismus auf $(X, B \cdot \omega)$ mit

$$\text{der}(f) = BAB^{-1} \in \text{GL}^+(X, B \cdot \omega)$$

und es gilt

$$B \cdot \text{GL}^+(X, \omega) \cdot B^{-1} \subseteq \text{GL}^+(X, B \cdot \omega).$$

Analog gilt

$$B^{-1} \cdot \text{GL}^+(X, B \cdot \omega) \cdot B \subseteq \text{GL}^+(X, B^{-1}B \cdot \omega) = \text{GL}^+(X, \omega)$$

und daraus folgt die Behauptung. □

4.2 Fuchssche Gruppen

Um interessante Aussagen zu Veechgruppen treffen zu können, brauchen wir zunächst etwas Vorkenntnisse über die Aktion von $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ bzw. $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene \mathbb{H} . Vieles davon kann man ausführlicher in [Kat92] nachlesen.

Definition 4.17 (Treue, freie und n -fach transitive Aktion)

Sei Γ eine Gruppe und M eine Menge, auf der Γ operiert.

- (i) Die Aktion heißt *treu*, wenn nur das Neutralelement von Γ trivial auf M operiert, also der Schnitt der Stabilisatoren aller Elemente von M trivial ist.
- (ii) Die Aktion heißt *frei*, wenn der Stabilisator jedes Elements $m \in M$ trivial ist.
- (iii) Die Aktion heißt *n -fach transitiv*, wenn es für je zwei n -Tupel (m_1, \dots, m_n) , $(m'_1, \dots, m'_n) \subseteq M$ ein Element $g \in \Gamma$ gibt mit $g \bullet m_1 = m'_1, \dots, g \bullet m_n = m'_n$.

Bemerkung 4.18 (Aktion von $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene). Wir betrachten die Aktion von $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene \mathbb{H} durch Möbiustransformationen, d. h. die Aktion, die gegeben ist durch:

$$A \bullet z := \frac{az + b}{cz + d} \text{ für } z \in \mathbb{H} \text{ und } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}).$$

In Vorlesungen zur Funktionentheorie kann man lernen, dass dies tatsächlich eine Aktion definiert und diese sogar transitiv ist. Sie lässt sich auch auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ fortsetzen und ist darauf dreifach transitiv. Nachlesen kann man das zum Beispiel in [Ren07, §2] und [Kat92, Abschnitte 1.1 und 1.3].

Allerdings ist die Aktion nicht treu und nicht annähernd frei, denn jeder Punkt hat einen unendlich großen Stabilisator. Etwas Redundanz lässt sich jedoch verhindern, indem man zu Äquivalenzklassen von Matrizen übergeht, die dieselbe Möbiustransformation definieren. Dadurch erhalten wir eine treue Aktion von $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ auf \mathbb{H} .

Definition 4.19 (Elliptische, parabolische und hyperbolische Elemente)

Die Elemente von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ können wir ihrer Spur nach in drei Klassen einteilen. Generell wird als *Spur* einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Term $a + d$ bezeichnet. Da dies für ein Element $T \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ nicht wohldefiniert ist, werden wir in diesem Kontext $|a + d|$ als die *Spur* von

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\}$$

bezeichnen.

- (i) T heißt *elliptisch*, wenn die Spur von T kleiner als 2 ist.
- (ii) T heißt *parabolisch*, wenn die Spur von T gleich 2 ist.
- (iii) T heißt *hyperbolisch*, wenn die Spur von T größer als 2 ist.

Dabei ist zu beachten, dass die Einheitsmatrix zu keiner der Klassen zugeordnet wird.

Bemerkung 4.20 (Unterscheidung der Elementtypen nach Fixpunkten). Wir können die Elemente von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ auch anhand der Fixpunkte ihrer Aktion auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ in die Klassen elliptisch, parabolisch und hyperbolisch einteilen. Für

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \right\} \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

mit $c \neq 0$ gilt:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \quad \Leftrightarrow \quad 0 = cz^2 + (d - a)z - b \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ \frac{-d + a \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4cb}}{2c} \right\}$$

Die Anzahl und Art der Fixpunkte ergeben sich in diesem Fall durch den Wert der Diskriminante

$$(d - a)^2 + 4cb = d^2 + 2ad + a^2 - 4(ad - bc) = (a + d)^2 - 4.$$

Ist $c = 0$ und damit $b \neq 0$, so hat die Spur von T den Wert $\lambda + \lambda^{-1} \geq 2$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (die Ungleichung folgt aus $(\lambda - 1)^2 \geq 0$). Damit ist T parabolisch oder hyperbolisch und es gilt:

$$\frac{az + b}{d} = z \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (d - a)z - b \text{ oder } z = \infty \quad \Leftrightarrow \quad z \in \left\{ \frac{b}{d - a}, \infty \right\}$$

Insgesamt folgt also: Ist die Spur kleiner als 2, so gibt es einen komplexen Fixpunkt in \mathbb{H} und einen zweiten, dazu komplex konjugierten Fixpunkt, der nicht in \mathbb{H} liegt. Ist die Spur gleich 2, gibt es genau einen reellen Fixpunkt bzw. den Fixpunkt ∞ . Und ist die Spur größer als 2, so gibt es zwei reelle Fixpunkte bzw. einen reellen Fixpunkt und den Fixpunkt ∞ .

Bemerkung 4.21 (Prototypen der Elementtypen). Wir wollen nun für jeden Vertreter eines Elements von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ eine einfache Beschreibung finden. Dazu konjugieren wir den gewählten Vertreter so, dass die Fixpunkte des konjugierten Elements bei $\pm i$ für elliptische, bei ∞ für parabolische und bei 0 und ∞ für hyperbolische Elemente liegen (das geht, weil die Aktion von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dreifach transitiv ist). Führen wir nun die Rechnungen in Bemerkung 4.20 umgekehrt durch, können wir die Einträge des konjugierten Elements bestimmen und es folgt:

- (i) Ein Vertreter eines elliptischen Elements ist konjugiert zu einer Drehung, d. h. konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ für ein } \theta \in (0, 2\pi).$$

- (ii) Ein Vertreter eines parabolischen Elements ist konjugiert zu einer Scherung, d. h. konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (iii) Ein Vertreter eines hyperbolischen Elements ist konjugiert zu einer Streckstauchung, d. h. konjugiert zu

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \neq 1.$$

Bemerkung 4.22 (Analoge Bezeichnungen für Elemente von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$). Oft werden die Bezeichnungen elliptisch, parabolisch und hyperbolisch auch auf Elemente von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ übertragen, ein Vertreter eines elliptischen (parabolischen, hyperbolischen) Elements in $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ wird also auch elliptisch (parabolisch, hyperbolisch) genannt.

Um nun auch topologische Methoden und Beschreibungen verwenden zu können, brauchen wir zusätzlich zur Gruppenstruktur noch eine Topologie auf $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Dafür wollen wir zunächst festhalten, was eine solche Topologie leisten soll.

Definition 4.23 (Topologische Gruppe)

Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe mit einer solchen Topologie, dass die Gruppenverknüpfung und die Inversenbildung stetig sind.

Beispiel 4.24 ($\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ als topologische Gruppen). Den Vektorraum \mathbb{R}^4 können wir mit der Topologie versehen, die von der euklidischen Metrik bzw. der Standardnorm herkommt. Wenn wir also $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^{2 \times 2} \cong \mathbb{R}^4$ auffassen, erhalten wir dadurch auch eine Topologie auf $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Entsprechend wird auch $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ zur topologischen Gruppe, indem wir darauf die zugehörige Teilraumtopologie betrachten. Ebenso können wir auf $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\{\pm I\}$ die entsprechende Quotiententopologie betrachten.

Definition 4.25 (Fuchssche Gruppe)

Eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ heißt *Fuchssche Gruppe*, wenn sie eine diskrete Untergruppe ist (bezüglich der in Beispiel 4.24 definierten Topologie).

Definition 4.26 (Eigentlich diskontinuierliche Aktion)

Sei Γ eine Gruppe, die auf einem topologischen Raum X durch Homöomorphismen operiert.

Die Aktion von Γ heißt *eigentlich diskontinuierlich*, wenn es für jedes Kompaktum $K \subseteq X$ nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$ gibt, so dass $\gamma \cdot K \cap K \neq \emptyset$ gilt.

Proposition 4.27 (Fuchssche Gruppen operieren eigentlich diskontinuierlich)

Eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ist genau dann eine Fuchssche Gruppe, wenn ihre Aktion auf der oberen Halbebene \mathbb{H} durch Möbiustransformationen eigentlich diskontinuierlich ist.

Beweis. Sei Γ eine Fuchssche Gruppe und $K \subseteq \mathbb{H}$ kompakt. Dann ist für jeden Punkt $k \in K$ die Menge

$$\Gamma_k := \{A \in \Gamma : A(k) \in K\} = \{A \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) : A(k) \in K\} \cap \Gamma$$

endlich, da sie Schnitt einer kompakten und einer diskreten Menge ist. Da K kompakt ist, finden wir ϵ -Umgebungen um endlich viele Punkte $k_1, \dots, k_n \in K$, die K überdecken. Dann sind alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma \cdot K \cap K \neq \emptyset$ in $\Gamma_{k_1} \cup \dots \cup \Gamma_{k_n}$ enthalten und das sind höchstens endlich viele.

Sei Γ eine Untergruppe von $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, die keine Fuchssche Gruppe ist. Dann gibt es einen Häufungspunkt in Γ , also insbesondere eine nicht-stationäre Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Gamma \setminus \{I\}$ mit $A_n \rightarrow I$. Dann gilt für die Aktion von Γ durch Möbiustransformationen auf \mathbb{H} , ein Kompaktum K und $k \in K^\circ$: $A_n k \rightarrow k$. Da K abgeschlossen ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $A_n k \in K$ für $n \geq n_0$ gilt. Also gilt auch $A_n(K) \cap K \neq \emptyset$ für alle A_n mit $n \geq n_0$, also insbesondere für unendlich viele $A_n \in \Gamma$. Damit ist die Aktion nicht eigentlich diskontinuierlich. \square

Definition 4.28 (Kokompakte Gruppe)

Eine diskrete Untergruppe Γ von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ oder $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ heißt *kompakt*, wenn der Quotientenraum \mathbb{H}/Γ kompakt ist.

Definition 4.29 (Gitter)

Eine diskrete Untergruppe Γ von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ heißt *Gitter* in $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, wenn der hyperbolische Flächeninhalt von \mathbb{H}/Γ endlich ist.

4.3 Veechgruppen endlicher Translationsflächen

Für endliche Translationsflächen sind schon seit der Veröffentlichung von [Vee89] einige Ergebnisse über ihre Veechgruppen bekannt, wovon wir ein paar hier auflisten wollen. Trotzdem werden wir bald sehen, dass immer noch viele Fragen offen sind.

Proposition 4.30 (Diskretheit der Holonomievektoren)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche. Dann ist die Menge der Holonomievektoren von Sattelverbindungen in (X, ω) diskret in \mathbb{R}^2 .

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Betrachte die Menge aller geodätischen Wege in \overline{X} , die in einer Singularität beginnen und Holonomievektor v haben. Da (X, ω) nur endlich viele Singularitäten hat und jede dieser Singularitäten konisch ist, ist das eine endliche Menge.

Für jeden Punkt $x \in \overline{X}$ gibt es ein $\epsilon(x) > 0$, so dass $B(x, \epsilon(x)) \setminus \{x\}$ keine Singularität enthält. Sei jetzt

$$\epsilon := \min \{ \epsilon(x) : x \text{ ist Endpunkt eines solchen geodätischen Weges} \}.$$

Also gibt es keine Sattelverbindung, die in einem $B(x, \epsilon) \setminus \{x\}$ für einen solchen Endpunkt x endet, und damit auch keine nicht-konstante Folge von Sattelverbindungen, deren Holonomievektoren gegen v konvergieren. Also ist v kein Häufungspunkt und damit die Menge der Holonomievektoren von Sattelverbindungen diskret in \mathbb{R}^2 . \square

Satz 5 (Veechgruppen von endlichen Translationsflächen sind diskret)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche. Dann ist die Veechgruppe von (X, ω) eine diskrete Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$.

Beweis. In Bemerkung 4.4 haben wir festgehalten, dass $GL^+(X, \omega)$ für eine endliche Translationsfläche eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ ist. Also bleibt nur noch die Diskretheit zu zeigen.

Für endliche Translationsflächen von Geschlecht 1 haben wir die Diskretheit in Beispiel 4.9 gesehen. Für Flächen von höherem Geschlecht wissen wir aus Proposition 3.13, dass es mindestens eine (nicht-hebbare) Singularität gibt. Da X nicht einfach zusammenhängend ist, finden wir auch nichttriviale Geodätische in \overline{X} , die die Singularität mit sich selbst verbinden. Diese Geodätischen in \overline{X} bestehen dann jeweils aus endlich vielen Sattelverbindungen und damit gibt es in mindestens zwei Richtungen Sattelverbindungen. Wir wählen für den Beweis der Diskretheit eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq GL^+(X, \omega)$ mit $A_n \rightarrow I$ und linear unabhängige Holonomievektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ von Sattelverbindungen in (X, ω) . Da affine Homöomorphismen Singularitäten und geodätische Wege erhalten, bildet A_n , $n \in \mathbb{N}$, jede Sattelverbindung wieder auf eine Sattelverbindung ab. Da aber nach Proposition 4.30 die Menge der Holonomievektoren von Sattelverbindungen diskret ist, folgt aus $A_n v \rightarrow v$ und $A_n w \rightarrow w$, dass für großes $n \in \mathbb{N}$ schon $A_n v = v$ und $A_n w = w$ gilt. Wegen der linearen Unabhängigkeit von v und w gilt dann $A_n = I$ für großes $n \in \mathbb{N}$. Also gilt auch für jede Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq GL^+(X, \omega)$ mit $A_n \rightarrow A \in GL^+(X, \omega)$, dass $A_n = A$ für großes n gilt, und damit ist $GL^+(X, \omega)$ diskret. \square

Korollar 4.31 (Veechgruppen und Fuchssche Gruppen). Jede projektive Veechgruppe einer endlichen Translationsfläche ist eine Fuchssche Gruppe.

Proposition 4.32 (Veechgruppen sind nie kokompakt)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche. Dann ist die Veechgruppe von (X, ω) nicht kokompakt.

Beweis. Ist X ein Torus, so kennen wir aus Beispiel 4.9 die Veechgruppe von (X, ω) und diese ist nicht kokompakt. Wir können im Folgenden also annehmen, dass (X, ω) Singularitäten und damit auch Sattelverbindungen hat.

Wäre $\mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega)$ kompakt, so müsste jede stetige Funktion darauf ihr Minimum annehmen. Wir werden zum Beweis der Nicht-Kompaktheit also eine stetige Funktion definieren, für die das nicht gilt.

Definiere dazu zunächst

$$\mathcal{H}(X) := \{(X, A \cdot \omega) : A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})\}$$

als Menge von (Isomorphieklassen von) Translationsstrukturen auf X und die Abbildung $l: \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder Translationsfläche die Länge ihrer kürzesten Sattelverbindung zuordnet (das geht wegen Proposition 4.30).

Definiere weiterhin die Abbildung $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{H}(X) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ x + iy &\mapsto \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: A &\mapsto A \cdot \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) &\mapsto (X, A \cdot \omega) &\mapsto l(X, A \cdot \omega) \end{aligned}$$

Die Abbildung f ist wohldefiniert und stetig. Für alle $A \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$ gilt $(X, A \cdot \omega) \cong (X, \omega)$ nach Bemerkung 4.15 und daher $l(X, A \cdot \omega) = l(X, \omega)$. Weil $\mathrm{GL}^+(X, \omega) \leq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ gilt und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ auf \mathbb{H} durch Möbiustransformationen operiert, induziert f eine stetige Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir wählen nun eine (ohne Einschränkung horizontale) Sattelverbindung γ in (X, ω) und die Folge

$$\left(A_t = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} \right)_{t \in \mathbb{R}} \subseteq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Dann ist $(A_t \cdot \gamma)_{t \in \mathbb{R}}$ eine Folge von immer kürzer werdenden Sattelverbindungen, wobei deren Länge nie 0 erreichen kann. Also ist $\tilde{f}(\mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega))$ nicht von 0 wegbeschränkt und damit kann $\mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega)$ nicht kompakt sein. \square

Es gibt auch spezielle Klassen von Translationsflächen, die sich durch ihre Veechgruppen charakterisieren lassen. Interessant sind neben sogenannten Veechflächen (siehe Definition 5.7) auch Origamis, da diese sich geometrisch auf einfache Weise beschreiben lassen. Für die Definition von Origamis wollen wir ausnahmsweise doch wieder hebbare Singularitäten zulassen.

Definition 4.33 (Origami)

Eine Translationsfläche (O, ω) heißt (*endliches Origami* (engl. origami oder square-tiled surface)), wenn eine der folgenden beiden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- (i) O lässt sich als Verklebung von (endlich vielen) Quadraten darstellen.
- (ii) O ist eine (endliche) Translationsüberlagerung des einfach punktierten Torus.

Proposition 4.34 (Veechgruppen von Origamis)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche. Dann hat der Schnitt von $\mathrm{GL}^+(X, \omega)$ und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ genau dann endlichen Index in den beiden Gruppen $\mathrm{GL}^+(X, \omega)$ und $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, wenn (X, ω) ein endliches Origami ist.

Beweis. Diese Aussage ist ein Spezialfall von [GJ00, Theorem 5.5], in dem es um verallgemeinerte Origamis geht. Im Beweis gehen ähnliche Argumente ein wie im Beweis der Veech-Dichotomie, mit der wir uns in Satz 9 beschäftigen. \square

Es sind noch viele weitere Aussagen zu Veechgruppen bekannt, einige davon schon seit vielen Jahren. Wir werden zum Beispiel in Abschnitt 5.1 noch eine Aussage kennenlernen, die die Existenz von Zylinderzerlegungen mit Elementen der Veechgruppe in Verbindung bringt.

Doch trotz dieser vielen bekannten Aussagen ist auch die Theorie der Veechgruppen von endlichen Translationsflächen noch nicht vollständig ausgearbeitet, im Gegenteil, folgende Frage wird schon eine längere Zeit bearbeitet und ist noch nicht gelöst:

Forschungsfrage 4.35. Welche Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$ sind Veechgruppen von endlichen Translationsflächen? Insbesondere: Gibt es eine endliche Translationsfläche, deren Veechgruppe zyklisch ist und von einem hyperbolischen Element erzeugt wird?

4.4 Veechgruppen allgemeiner Translationsflächen

Bemerkung 4.36 (Satz 5 gilt für nicht-endliche Translationsflächen nicht). Wie wir in Beispiel 4.8 gesehen haben, ist die Veechgruppe von \mathbb{C} ganz $GL^+(2, \mathbb{R})$, also insbesondere weder eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ noch diskret in $GL^+(2, \mathbb{R})$. Ebenso ist auch die Veechgruppe des Zylinders, die wir in Bemerkung 4.10 bestimmt haben, weder diskret in $GL^+(X, \omega)$ noch eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$.

Für eine nicht-endliche Translationsfläche gilt also die Aussage aus Satz 5 im Allgemeinen nicht.

Es gibt allerdings auch Klassen von nicht-endlichen Translationsflächen, für die die Aussage von Satz 5 doch wieder stimmt. Als Voraussetzung brauchen wir unter anderem die Totalbeschränktheit der zugrunde liegenden Riemannschen Fläche.

Definition 4.37 (Totalbeschränktheit)

Ein metrischer Raum heißt *totalbeschränkt*, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte gibt, so dass die ϵ -Kugeln um diese Punkte den Raum überdecken.

Satz 6 (Veechgruppen sind manchmal diskrete Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche, die eine geschlossene Geodätische besitzt. Ist X totalbeschränkt oder hat X endlichen Flächeninhalt, dann ist die Veechgruppe eine diskrete Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$.

Beweis. Den Beweis kann man vollständig in [Bow12, Abschnitt 2] nachlesen. Die dort gestellte Forderung nach leerem idealem Rand² ist für unsere Translationsflächen immer erfüllt, da sie aus der Forderung folgt, dass die Menge der Singularitäten diskret sein soll.

²Eine Definition von idealem Rand, wie sie hier verwendet wird, kann man in [Hub06, Definition 3.7.1] nachlesen. Insbesondere ist ein vollkommen anderes Objekt gemeint als bei Kérékjártó bzw. Richards, die damit Enden beschrieben haben (siehe Anmerkungen zum Beweis von Satz 4).

Für den Beweis wird wieder zuerst gezeigt, dass $GL^+(X, \omega)$ in $SL(2, \mathbb{R})$ enthalten ist. Für den Nachweis der Diskretheit wird dann gezeigt, dass die Veechgruppe auf einer über maximale Zylinder definierten, diskreten Menge operiert. \square

Ob Satz 6 noch allgemeiner gilt, also insbesondere ohne die Forderung nach einer geschlossenen Geodätischen, ist noch nicht bekannt. Genauer fragt man sich:

Forschungsfrage 4.38 (Diskretheit von Veechgruppen). Gibt es eine Translationsfläche mit endlichem Flächeninhalt, deren Singularitäten eine diskrete Menge sind, aber deren Veechgruppe nicht diskret ist?

In Bemerkung 4.36 haben wir zum Beweis zwei Beispiele von Translationsflächen angegeben, deren Veechgruppen nicht als Veechgruppen endlicher Translationsflächen realisiert werden können. Weitere Beispiele für Veechgruppen von nicht-endlichen Translationsflächen haben wir noch nicht gesehen, sie sind aber nicht selten, denn Piotr Przytycki, Gabriela Schmithüsen und Ferrán Valdez haben in [PSV11] gezeigt, dass sehr viele Gruppen als Veechgruppen von zahmen Loch-Ness-Monstern realisierbar sind. Konkret gilt:

Satz 7 (Veechgruppen von zahmen Translationsflächen)

Sei G die Veechgruppe einer zahmen Translationsfläche. Dann gilt für G genau eine der folgenden Aussagen:

(i) G ist abzählbar und disjunkt zu

$$\mathcal{U} := \{M \in GL^+(2, \mathbb{R}) : \|Mv\| < \|v\| \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}.$$

(ii) G ist konjugiert zu

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

(iii) G ist konjugiert zu

$$P' := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+ \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -s \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

(iv) $G = GL^+(2, \mathbb{R})$.

Ist umgekehrt $G \leq GL^+(2, \mathbb{R})$ eine Gruppe, die (i), (ii), (iii) oder (iv) erfüllt, so kann G als Veechgruppe einer zahmen Translationsfläche realisiert werden. Dabei lässt sich die Translationsfläche in den Fällen (i), (ii) und (iii) immer so wählen, dass sie (nach Hinzunehmen der konischen Singularitäten) topologisch ein Loch-Ness-Monster ist.

Beweis. Wir wollen hier darauf verzichten, zu zeigen, dass man die Translationsflächen so wählen kann, dass sie Loch-Ness-Monster sind. Der Beweis dafür kann in [PSV11] nachgelesen werden und ist nicht schwieriger, nur etwas aufwändiger.

Wir beweisen in Proposition 4.40 und Proposition 4.41 den ersten Teil der Aussage und mit Beispiel 4.8, Beispiel 4.44 und Proposition 4.45 den zweiten Teil der Aussage. \square

Korollar 4.39 (Diskrete Untergruppen von $SL(2, \mathbb{R})$ als Veechgruppen). Jede diskrete Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ kann als Veechgruppe einer Translationsfläche realisiert werden.

Beweis. Jede diskrete Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ ist insbesondere eine diskrete Untergruppe von \mathbb{R}^4 und damit abzählbar. Es bleibt also zu zeigen, dass jedes Element $M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ eine Norm größer oder gleich 1 hat: Es gilt

$$1 = \det(M)^2 \leq (ad - bc)^2 + (ab + cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

und deswegen $a^2 + c^2 \geq 1$ oder $b^2 + d^2 \geq 1$. Aus

$$\left\| M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + c^2} \geq 1 \quad \text{oder} \quad \left\| M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{b^2 + d^2} \geq 1$$

folgt dann, dass die Norm von M größer oder gleich 1 ist. \square

Proposition 4.40 (Veechgruppen zahmer Translationsflächen (überabzählbar))

Sei (X, ω) eine zahme Translationsfläche und die Veechgruppe von (X, ω) überabzählbar. Dann gilt:

- (i) *Besitzt (X, ω) keine Sattelverbindungen, dann ist $GL^+(X, \omega)$ entweder $GL^+(2, \mathbb{R})$ oder konjugiert zu P' .*
- (ii) *Besitzt (X, ω) Sattelverbindungen, dann ist $GL^+(X, \omega)$ konjugiert zu P oder P' .*

Beweis. (i) Für den Beweis unterscheiden wir danach, ob (X, ω) Singularitäten hat oder nicht:

Fall 1: (X, ω) hat keine Singularitäten. Die universelle Überlagerung³ von X ist dann \mathbb{C} . Also ist X homöomorph zu \mathbb{C} , zu einem Zylinder oder zu einem Torus (diese Aussage kann man beispielsweise in [IT92, Theorem 2.13] nachlesen). Die Veechgruppe eines Torus ist aber nicht überabzählbar (siehe Beispiel 4.9), also ist $GL^+(X, \omega)$ nach Beispiel 4.8 und Bemerkung 4.10 entweder $GL^+(2, \mathbb{R})$ oder konjugiert zu P' .

Fall 2: (X, ω) hat mindestens eine Singularität σ . Da von σ keine Sattelverbindungen ausgehen, ist X isometrisch zu einer zyklischen Translationsüberlagerung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Daraus folgt, dass $GL^+(X, \omega) = GL^+(2, \mathbb{R})$ ist.

- (ii) Zunächst zeigen wir mit einem Widerspruchsbeweis, dass alle Sattelverbindungen von (X, ω) parallel sind: Wir nehmen also an, das wäre nicht so, und betrachten die Holonomievektoren v_1, v_2 von zwei nicht-parallelen Sattelverbindungen. Betrachte

³Eine *universelle Überlagerung* ist eine einfach zusammenhängende Überlagerung. Diese ist universell in dem Sinne, dass sie Überlagerung jeder weiteren Überlagerung des betrachteten Raumes ist.

Riemannsche Flächen haben eine (bis auf Homöomorphismus) eindeutige universelle Überlagerung. Diese erhält man, indem man für einen festen Basispunkt alle Paare (p, γ) von Punkten p und Wegen γ vom Basispunkt nach p betrachtet und zwei Paare $(p, \gamma), (p', \gamma')$ als äquivalent ansieht, wenn $p = p'$ gilt und γ und γ' zueinander homotop sind. Genauer kann man in [IT92, Abschnitt 2.2] nachlesen.

weiter die Menge V aller Holonomievektoren von Sattelverbindungen und die Abbildung

$$\eta: \mathrm{GL}^+(X, \omega) \rightarrow V \times V, g \mapsto (g(v_1), g(v_2)).$$

Da $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 ist, muss einerseits η injektiv sein. Da aber (X, ω) nur abzählbar viele Singularitäten hat und diese jeweils konisch oder helikal sind, also jede Richtung nur abzählbar oft vorkommt, ist V abzählbar und damit kann η andererseits nicht injektiv sein.

Wir wollen nun zunächst voraussetzen, dass alle Sattelverbindungen horizontal sind. Dann definieren wir $S(X, \omega)$ als die Vereinigung aller Singularitäten, Sattelverbindungen und horizontaler Separatrizes. Da X wegzusammenhängend und \overline{X} vollständig ist, ist auch $S(X, \omega)$ zusammenhängend und vollständig bezüglich der Teilraummetrik.

Wir zeigen als nächstes $P \subseteq \mathrm{GL}^+(X, \omega)$: Sei W der Abschluss einer Wegzusammenhangskomponente von $\overline{X} \setminus S(X, \omega)$. Der Rand von W ist zusammenhängend, da es sonst zwei Singularitäten in verschiedenen Randkomponenten gäbe, die durch eine nicht-horizontale Sattelverbindung verbunden wären. Da W vollständig ist, ist W also entweder eine Halbebene oder ein Halbzylinder, jeweils mit horizontalem Rand. Ein Element $g \in P$ operiert auf W so, dass der Rand festgehalten wird. Da dies auch für den Abschluss jeder anderen Zusammenhangskomponente gilt, lässt sich dadurch eine Aktion von g auf ganz X definieren.

Nun zeigen wir $\mathrm{GL}^+(X, \omega) \subseteq P'$: Sei $g \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$. Da g Sattelverbindungen wieder auf Sattelverbindungen abbilden muss und diese alle horizontal sind, gilt

$$g \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Angenommen, g wäre nicht in P' enthalten. Dann ist $\lambda \notin \{\pm 1\}$ und g oder g^{-1} operiert als Kontraktion auf $S(X, \omega)$. Aus dem Fixpunktsatz von Banach⁴ folgt dann, dass für jede Singularität σ die Folge $(g^n \cdot \sigma)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(g^{-n} \cdot \sigma)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt konvergiert. Da aber Singularitäten auf Singularitäten abgebildet werden, hieße das, dass die Menge der Singularitäten einen Häufungspunkt hat. Das kann aber bei zahmen Translationsflächen nicht vorkommen, weswegen g in P' enthalten sein muss.

Insgesamt gilt $P \subseteq \mathrm{GL}^+(X, \omega) \subseteq P'$ und da die Gruppe P Index 2 in P' hat, gilt $\mathrm{GL}^+(X, \omega) = P$ oder $\mathrm{GL}^+(X, \omega) = P'$.

Für den allgemeineren Fall, in dem die Sattelverbindungen nicht horizontal sind, drehen wir die Translationsfläche, das heißt, wir wählen ein Element $B \in \mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, so dass die Sattelverbindungen von $(X, B \cdot \omega)$ horizontal sind. Mit Proposition 4.16 wissen wir, dass sich die Veechgruppe von (X, ω) dadurch nur um eine Konjugation ändert, also ist im allgemeinen Fall $\mathrm{GL}^+(X, \omega)$ zu P oder zu P' konjugiert. \square

⁴Der Fixpunktsatz von Banach kennt man vor allem wegen der Aussage, dass jede Kontraktion eines vollständigen metrischen Raums genau einen Fixpunkt hat. Dabei ist eine *Kontraktion* eine Lipschitz-stetige Abbildung mit einer Lipschitz-Konstanten in $[0, 1)$.

Proposition 4.41 (Veechgruppen zahmer Translationsflächen (abzählbar))

Sei (X, ω) eine zahme Translationsfläche und die Veechgruppe von (X, ω) abzählbar. Dann sind $GL^+(X, \omega)$ und \mathcal{U} disjunkt.

Beweis. Hat (X, ω) keine Singularitäten, dann ist wie im Beweis von Proposition 4.40 die universelle Überlagerung \mathbb{C} . Aus der Abzählbarkeit von $GL^+(X, \omega)$ folgt dann aber, dass X ein Torus sein muss und dessen Veechgruppe $SL(2, \mathbb{Z})$ (bzw. jedes Konjugat davon) enthält keine Elemente aus \mathcal{U} (siehe Korollar 4.39).

Sei jetzt σ eine Singularität von (X, ω) . Angenommen, es gäbe ein $g \in \mathcal{U}$, das Ableitung einer affinen Abbildung φ ist. Die Abbildung φ lässt sich zu einer Abbildung $\bar{\varphi}$ auf \bar{X} fortsetzen. Dann ist $\bar{\varphi}$ eine Kontraktion und der Fixpunktsatz von Banach sagt wieder, dass $(\bar{\varphi}^n(\sigma))_{n \in \mathbb{N}}$ in \bar{X} konvergiert. Dann muss σ der Fixpunkt von $\bar{\varphi}$ sein, denn sonst wären die Singularitäten der Translationsfläche nicht diskret. Da dies für alle Singularitäten gilt, folgt, dass σ die einzige Singularität von (X, ω) ist.

Gäbe es nun einen nichttrivialen, einfach geschlossenen Weg durch σ , dann wären die Verkettungen dieses Wegs mit $\bar{\varphi}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) beliebig kurze, nichttriviale, einfach geschlossene Wege durch σ . Da aber die Existenz solcher Wege bei zahmen Translationsflächen ausgeschlossen ist, muss X einfach zusammenhängend sein. Daher ist X eine zyklische Translationsüberlagerung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und die Veechgruppe deshalb $GL^+(2, \mathbb{R})$. Diese ist aber nicht abzählbar, was die Annahme, dass ein $g \in \mathcal{U}$ Element der Veechgruppe sein kann, zum Widerspruch führt. \square

Als nächstes werden wir zeigen, dass es für jede der genannten Gruppen tatsächlich eine Translationsfläche gibt, die diese Gruppe als Veechgruppe hat. Dazu werden wir Beispiele bzw. eine ganze Familie von Beispielen angeben. Nicht nur hier werden Beispiele konstruiert, indem mehrere Kopien von \mathbb{C} oder des Einheitsquadrats „aufgeschlitzt“ und neu zusammengeklebt werden, so dass eine zusammenhängende Fläche entsteht. Dieses Verfahren wollen wir zunächst genauer betrachten:

Definition 4.42 (Segment, Segmentpaar)

Seien (X_1, ω_1) , (X_2, ω_2) Translationsflächen.

- (i) Ein *Segment* auf (X_1, ω_1) ist eine abgeschlossene Geodätische in X_1 , die endliche Länge hat und mit einer Orientierung versehen ist.
- (ii) Ist m_1 ein Segment auf (X_1, ω_1) und m_2 ein Segment auf (X_2, ω_2) , so dass die Holonomievektoren von m_1 und m_2 übereinstimmen, dann nennen wir $\{m_1, m_2\}$ ein (*zulässiges*) *Segmentpaar* von (X_1, ω_1) und (X_2, ω_2) .

Bemerkung 4.43 (Verkleben von Translationsflächen entlang Segmentpaaren). Seien (X_1, ω_1) und (X_2, ω_2) Translationsflächen mit einem zulässigen Segmentpaar $\{m_1, m_2\}$ und m_1 auf (X_1, ω_1) , m_2 auf (X_2, ω_2) . Die metrische Kompletierung von $X_1 \setminus m_1$ entsteht aus X_1 durch Einkleben von zwei Kopien von m_1 , wobei die Endpunkte identifiziert werden. Diese wollen wir m'_1 und m''_1 nennen und analog bezeichnen wir m'_2 und m''_2 in der metrischen Kompletierung von $X_2 \setminus m_2$. Durch Verkleben von m'_1 mit m''_2 und m''_1 mit m'_2 (Orientierung beachten!) erhalten wir dann wieder eine Translationsfläche. Dazu

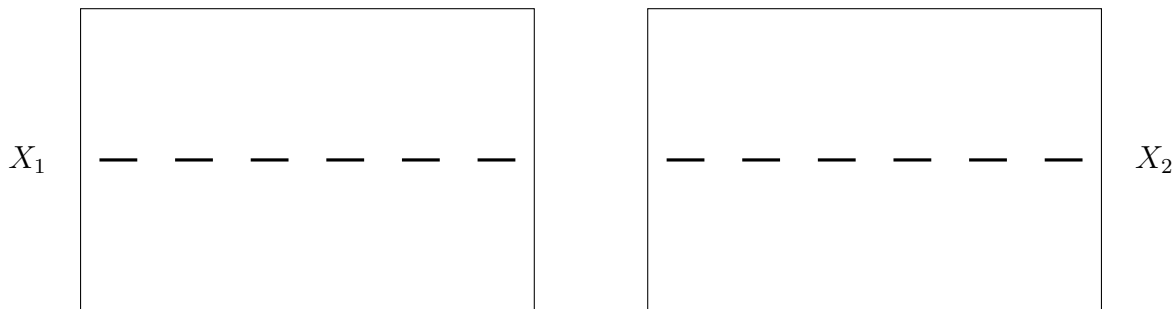


Abbildung 4.2: Durch Verkleben von X_1 und X_2 entlang der Segmente erhält man eine Translationsfläche mit Veechgruppe P'

seien die beiden neu entstandenen konischen Singularitäten mit Vielfachheit 2 an den Endpunkten der eingeklebten Kopien nicht mehr in der Fläche enthalten. Wir nennen diese neue Translationsfläche *verklebt entlang dem Segmentpaar* $\{m_1, m_2\}$.

Dieses Verfahren können wir über einen Limesprozess auch für unendlich viele Segmentpaare machen, so lange die Segmentpaare in $\overline{X_1}$ und $\overline{X_2}$ sich nicht häufen.

Beispiel 4.44 (Translationsflächen mit den Veechgruppen P und P'). Seien (X_1, ω_1) und (X_2, ω_2) zwei Kopien von $(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ wie in Beispiel 1.29.

- (i) Wir versehen X_1 und X_2 jeweils mit Segmenten $m_{1,n}$ und $m_{2,n}$ ($n \in \mathbb{Z}$), die in $4n + 1$ beginnen und in $4n + 3$ enden (siehe Abbildung 4.2). Sei (X, ω) die Translationsfläche, die aus (X_1, ω_1) und (X_2, ω_2) durch Verkleben entlang aller Segmentpaare $\{\{m_{1,n}, m_{2,n}\}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ entsteht.

Die Gruppe P' operiert auf (X_1, ω_1) und auf (X_2, ω_2) und diese Aktion steigt auch auf (X, ω) ab. Deshalb ist P' in der Veechgruppe von (X, ω) enthalten. Wegen Proposition 4.40 kann die Veechgruppe nicht größer sein und es gilt $GL^+(X, \omega) = P'$.

- (ii) Wir versehen X_1 und X_2 wieder mit Segmenten $m_{1,n}$ und $m_{2,n}$, die in $4n + 1$ beginnen und in $4n + 3$ enden, dieses Mal aber nur für $n \in \mathbb{N}$ (siehe Abbildung 4.3). Sei (X, ω) wieder die Translationsfläche, die aus (X_1, ω_1) und (X_2, ω_2) durch Verkleben entlang der entsprechenden Segmentpaare entsteht.

Diesmal steigt die Aktion von P auf (X_1, ω_1) und (X_2, ω_2) auf (X, ω) ab. Jedes Element von $P' \setminus P$ bildet die zwei horizontalen Separatrizes von (X, ω) auf horizontale Separatrizes in die entgegengesetzte Richtung ab und ist daher orientierungsumkehrend und kann nicht Element der Veechgruppe sein. Aus Proposition 4.40 folgt deshalb $GL^+(X, \omega) = P$.

- (iii) Wird auf (X, ω) aus (i) bzw. (ii) ein Element $B \in GL(2, \mathbb{R})$ wie in Bemerkung 4.12 angewendet, dann gilt $GL^+(X, B \cdot \omega) = B \cdot P \cdot B^{-1}$ bzw. $GL^+(X, B \cdot \omega) = B \cdot P' \cdot B^{-1}$ nach Proposition 4.16.

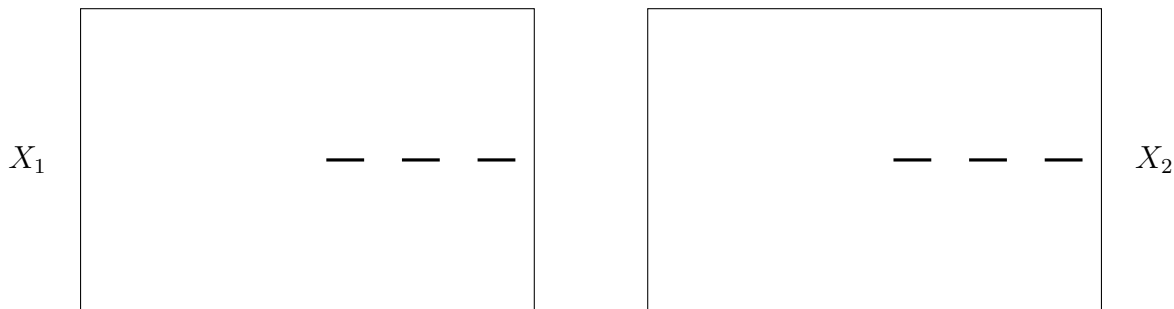


Abbildung 4.3: Durch Verkleben von X_1 und X_2 entlang der Segmente erhält man eine Translationsfläche mit Veechgruppe P

Proposition 4.45 (Translationsfläche mit gegebener Veechgruppe)

Sei G eine abzählbare Untergruppe von $GL^+(2, \mathbb{R})$, die disjunkt zu \mathcal{U} ist. Dann gibt es eine zahme Translationsfläche, deren Veechgruppe G ist.

Beweis. Wir werden zum Beweis eine Konstruktionsbeschreibung für eine zahme Translationsfläche angeben, die als Veechgruppe eine gegebene Gruppe G mit den oben genannten Eigenschaften hat. Dafür konstruieren wir eine Fläche mit einer Methode, die durch die Konstruktion des Cayleygraphens⁵ von G inspiriert ist, und erhalten analog zur Aktion von G auf dem Cayleygraphen eine Aktion von G auf der Fläche.

Sei also G eine abzählbare Untergruppe von $GL^+(2, \mathbb{R})$, die disjunkt zu \mathcal{U} ist. Ist G trivial, dann sei $g_1 = I$, ansonsten sei $(g_n)_{n \in N=1,2,\dots}$ eine (endliche oder unendliche) Folge von Erzeugern von G . Weiterhin sei e_1 der erste Einheitsvektor und e_2 der zweite Einheitsvektor auf \mathbb{C} bzw. entsprechend auf Kopien von \mathbb{C} .

Wir definieren zunächst einige Hilfsflächen mit Segmenten, die wir danach entlang von entsprechenden zulässigen Segmentpaaren verkleben werden (siehe Abbildung 4.4):

- **Pufferfläche:** Betrachte zwei Kopien von $(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ und auf einer davon die Segmente p von 0 nach 1 und m_p von 2 nach 3 und auf der anderen die Segmente q von 0 nach 1 und m_q von i nach $1 + i$. Es sei (P, ω_P) die entlang des Segmentpaars $\{m_p, m_q\}$ verklebte Fläche. Die Segmente p und q darauf benötigen wir erst später. Von dieser Pufferfläche verkleben wir später für jeden Erzeuger eine Kopie, daher sei (P_n, ω_{P_n}) für jedes $n \in N$ eine Pufferfläche wie gerade definiert mit den Segmenten p_n und q_n .
- **Verzierte Fläche:** Betrachte eine dreifache zyklische Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und auf einem der Urbilder von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Segmente v von 1 nach 2, m_u von $-2i$ nach

⁵Der *Cayleygraph* einer Gruppe G mit den Erzeugern g_1, g_2, \dots besteht aus je einer Ecke für jedes Element $g \in G$ und zu jeder Ecke g gibt es für jeden Erzeuger g_i eine Kante von g nach gg_i . Der Graph ist abhängig von der Wahl der Erzeuger, aber immer zusammenhängend.

Beispielsweise ist der Cayleygraph einer freien Gruppe in n Erzeugern ein regulärer Baum von Grad $2n$ und der Cayleygraph einer zyklischen Gruppe von Ordnung n ist ein n -Eck (jeweils bei geeigneter Wahl der Erzeuger). Genauer kann man in [Her07] oder [Har03, Abschnitt IV.A.] nachlesen.

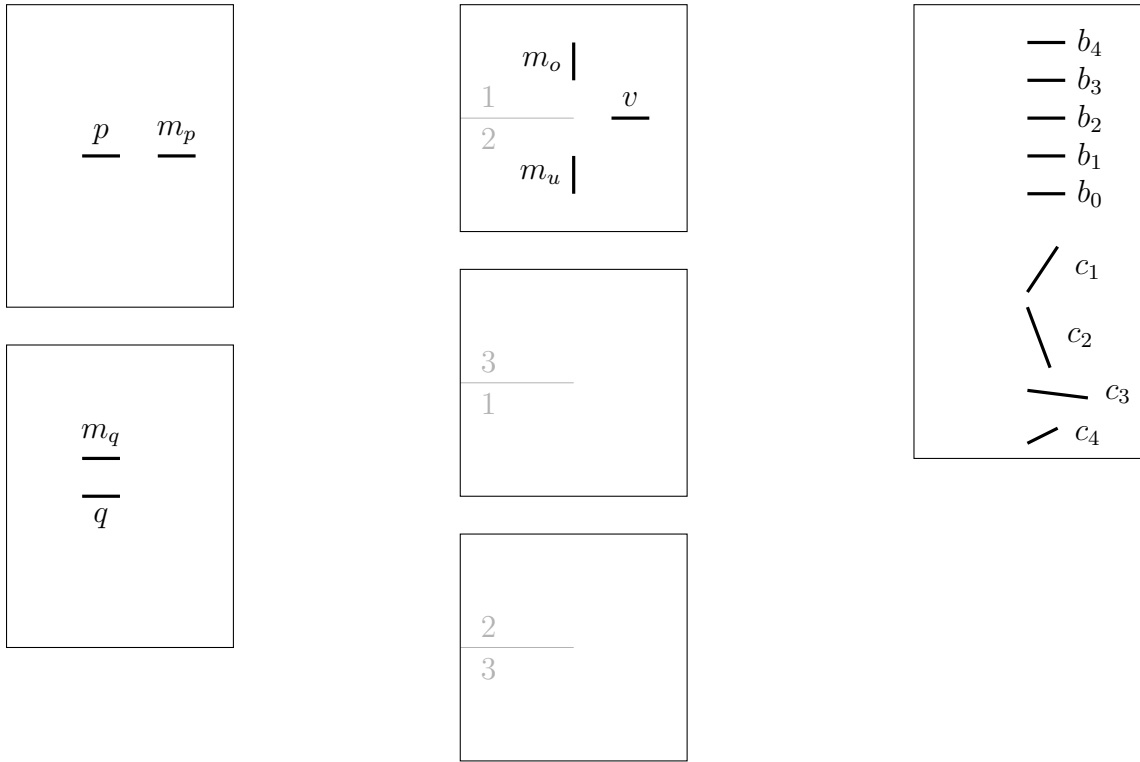


Abbildung 4.4: Beispiele für die Pufferfläche (P, ω_P) (links), die verzierte Fläche (V, ω_V) (Mitte) und die Basisfläche (B, ω_B) (rechts)

–i und m_o von i nach 2i. Die Fläche, die durch Verkleben entlang des Segmentpaares $\{m_u, m_o\}$ entsteht, heiÙe (V, ω_V) .

- Basisfläche: Betrachte eine Kopie von $(\mathbb{C}, \omega_{\mathbb{C}})$ mit den Segmenten b_n von ni nach $1 + ni$ für $n \in N \cup \{0\}$. Füge sukzessiv für jedes $g_n, n \in N$, ein weiteres Segment c_n von $-y_n i$ nach $g_n^{-1}(e_1) - y_n i$ hinzu, wobei $y_n \in \mathbb{R}$ jeweils groÙ genug gewählt sei, dass alle bis dahin definierten Segmente disjunkt sind und die Folge der Segmente (c_n) keinen Häufungspunkt hat. Die Fläche mit diesen Segmenten nennen wir (B, ω_B) .

Für jedes $g \in G$ können wir nun wie in Bemerkung 4.12 auch die Flächen $(P_n, g \cdot \omega_P)$ bzw. $(V, g \cdot \omega_V)$ bzw. $(B, g \cdot \omega_B)$ betrachten. Die Segmente darauf heiÙen jeweils $\bar{g}(p_n)$ und $\bar{g}(q_n)$ bzw. $\bar{g}(v)$ bzw. $\bar{g}(b_n)$ und $\bar{g}(c_n)$. Alle diese Pufferflächen, verzierten Flächen und Basisflächen verkleben wir folgendermaÙen:

- Verklebe $(B, g \cdot \omega_B)$ mit $(V, g \cdot \omega_V)$ entlang des Segmentpaares $\{\bar{g}(b_0), \bar{g}(v)\}$.
- Verklebe $(B, g \cdot \omega_B)$ mit $(P_n, g \cdot \omega_P)$ entlang des Segmentpaares $\{\bar{g}(b_n), \bar{g}(p_n)\}$.
- Verklebe $(B, g \cdot \omega_B)$ mit $(P_n, g_n^{-1}g \cdot \omega_P)$ entlang des Segmentpaares $\{\bar{g}(c_n), \overline{g_n^{-1}g}(q_n)\}$.

Die entstandene zusammenhängende Fläche heiÙe (X, ω) . Sie hat folgende Eigenschaften:

- Der Abstand von $\bar{g}(p)$ zu $\bar{g}(q)$ in $(P, g \cdot \omega_P)$ ist mindestens $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

Wegen $\|g\| \geq 1$ gibt es ein $v = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{x^2 + y^2} \leq \|g(v)\| \\ &\leq |x| \cdot \|g(e_1)\| + |y| \cdot \|g(e_2)\| \\ &\leq (|x| + |y|) \cdot \max\{\|g(e_1)\|, \|g(e_2)\|\} \\ &= \sqrt{x^2 + 2|xy| + y^2} \cdot \max\{\|g(e_1)\|, \|g(e_2)\|\} \\ &\leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \cdot \max\{\|g(e_1)\|, \|g(e_2)\|\} \end{aligned}$$

und aus dem Vergleich des zweiten und des letzten Terms folgt

$$\begin{aligned} d(\bar{g}(p), \bar{g}(q)) &\geq d(\bar{g}(p), \bar{g}(m_p)) + d(\bar{g}(m_q), \bar{g}(q)) \\ &= \|g(e_1)\| + \min\{\|g(e_2 + se_1)\| : s \in [-1, 1]\} \\ &\geq \|g(e_1)\| + \max\{\min\{\|g(e_2)\| - |s| \cdot \|g(e_1)\| : s \in [-1, 1]\}, 0\} \\ &= \|g(e_1)\| + \max\{\|g(e_2)\| - \|g(e_1)\|, 0\} \\ &= \max\{\|g(e_1)\|, \|g(e_2)\|\} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

- Singularitäten und Sattelverbindungen: Auf (B, ω_B) gibt es keine Singularitäten, auf (P_n, ω_P) zwei konische Singularitäten der Vielfachheit 2 und auch durch Verkleben entlang von Segmentpaaren entstehen nur konische Singularitäten der Vielfachheit

2. Auf (V, ω_V) gibt es dagegen nach Konstruktion nicht nur zwei konische Singularitäten der Vielfachheit 2, sondern auch eine konische Singularität der Vielfachheit 3. In dieser beginnen drei Sattelverbindungen (mit Holonomievektoren e_2, e_1 und $-e_2$) und der Winkel zwischen diesen Sattelverbindungen beträgt $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ und 5π .

- **Zahmheit der Translationsfläche:** Wir erhalten (X, ω) durch Verkleben entlang abzählbar vieler Segmentpaare. Durch die Pufferflächen $(P_n, g \cdot \omega_P)$ liegen diese Segmentpaare alle diskret und dadurch erhalten wir wie in Bemerkung 4.43 beschrieben wieder eine Translationsfläche. Auf dieser sind auch alle Singularitäten diskret (wegen den diskreten Segmentpaaren) und wie oben beschrieben konisch. Daher ist (X, ω) eine zahme Translationsfläche.

Nun müssen wir noch die Veechgruppe von (X, ω) bestimmen. Nach Konstruktion ist jedes $g \in G$ schon in der Veechgruppe enthalten. Sei jetzt $f \in \text{Aff}^+(X, \omega)$. Dann muss f die konische Singularität σ von (V, ω_V) mit Vielfachheit 3 auf die Singularität σ_g von $(V, g \cdot \omega_V)$ für ein $g \in G$ abbilden, da f die Vielfachheit erhalten muss. Wir zeigen nun $\text{der}(f) = g$. Da f auch Sattelverbindungen wieder auf Sattelverbindungen abbilden muss und von den Winkeln zwischen den Sattelverbindungen, die in σ_g beginnen, nur einer größer als π sein kann, muss f auch alle anderen Singularitäten σ' von (V, ω_V) auf die entsprechenden Singularitäten $\bar{g}(\sigma')$ von $(V, g \cdot \omega_V)$ abbilden. Damit ist die Ableitung von f in einer Umgebung von σ schon g , also gilt $\text{der}(f) = g$ auf ganz (X, ω) .

Insgesamt ist damit gezeigt, dass $\text{GL}^+(X, \omega) = G$ gilt. \square

4.5 Veechgruppen und Drehkomponenten wilder Singularitäten

Abschließend für dieses Kapitel wollen wir noch einen Satz aus [BV13] aufgreifen, der Zusammenhänge zwischen der Veechgruppe einer Translationsfläche und ihren Singularitäten aufzeigt. Für den Beweis des Satzes wird untersucht, was mit den Drehkomponenten von wilden Singularitäten unter einer affinen Abbildung passiert. Daher definieren wir zunächst noch Abbildungen, die für eine formale Beschreibung nützlich sind:

Definition 4.46 (Richtung einer linearen Näherung, Randrichtung, f_* , A_f)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und σ eine Singularität darauf. Sei weiter $f \in \text{Aff}(X, \omega)$ und \bar{f} die Fortsetzung von f auf \bar{X} .

- (i) Die stetige Abbildung $\text{dir}: \mathcal{L}(\sigma) \rightarrow S^1$ sei die universelle Abbildung, die über

$$\mathcal{L}^\epsilon(\sigma) \rightarrow S^1, \gamma \mapsto \dot{\gamma}(t) \text{ für } \epsilon > 0 \text{ und } t \in (0, \epsilon)$$

definiert ist. Das Bild einer linearen Näherung $[\gamma]$ unter $\text{dir}: \mathcal{L}(\sigma) \rightarrow S^1$ nennen wir *Richtung* von $[\gamma]$.

- (ii) Ist $\overline{[\gamma]}$ eine Drehkomponente von $\mathcal{L}(\sigma)$, die nicht-leeren Rand hat, und konvergiert $([\gamma_n])_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein Element aus dem Rand, dann heißt der Limes von $\left(\text{dir}_{\overline{[\gamma]}}([\gamma_n]) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ *Randrichtung* von $\overline{[\gamma]}$.

(iii) Der Homöomorphismus $f_*: \mathcal{L}(\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(\overline{f}(\sigma))$ sei die universelle Abbildung, die über

$$\mathcal{L}^\epsilon(\sigma) \rightarrow \mathcal{L}(\overline{f}(\sigma)), \gamma \mapsto [f \circ \gamma] \text{ für } \epsilon > 0$$

definiert ist.

(iv) Die Abbildung $A_f: S^1 \rightarrow S^1$ sei dadurch definiert, dass sie jeder Richtung einer linearen Näherung die Richtung des Bildes der linearen Näherung unter f_* zuordnet, das heißt $A_f \circ \text{dir} = \text{dir} \circ f_*$.

Satz 8 (Veechgruppe und Drehkomponenten)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche, auf der es mindestens eine, aber nur endlich viele Drehkomponenten mit endlicher Länge gibt. Dann gilt:

- (i) Ist die Ableitung eines $f \in \text{Aff}(X, \omega)$ elliptisch, dann ist sie auch ein Torsionselement.
- (ii) Gilt für eine der Längen λ der Drehkomponenten $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, dann gibt es kein $f \in \text{Aff}(X, \omega)$, dessen Ableitung parabolisch, aber nicht $\pm I$ ist.
- (iii) Für jedes $f \in \text{Aff}(X, \omega)$, dessen Ableitung hyperbolisch ist, sind die Randrichtungen der Drehkomponenten von endlicher Länge invariant unter A_f .

Beweis. Da jede affine Abbildung f die Menge der Singularitäten und die Menge der Geodätischen festhält, bildet die dadurch induzierte Abbildung f_* auch Drehkomponenten wieder auf Drehkomponenten ab. Da es nur endlich viele von endlicher Länge gibt, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass f_*^n jede Drehkomponente von endlicher Länge festhält. Sei im Folgenden $[\gamma]$ eine solche Drehkomponente.

- (i) Angenommen, die Ableitung von f ist elliptisch, aber kein Torsionselement. Dann ist jede Potenz von f eine nichttriviale Drehung, also erhält jede Potenz von A_f keine Richtung in S^1 . Also erhält auch keine Potenz von A_f die Randrichtungen von $[\gamma]$ und insbesondere erhält f_*^n die Drehkomponente $[\gamma]$ nicht, was ein Widerspruch zur Wahl von n ist.
- (ii) Sei jetzt die Ableitung von f parabolisch, aber nicht $\pm I$. Dann ist auch die Ableitung von f^n parabolisch und nicht $\pm I$. Damit hat $A_{f^n}: S^1 \rightarrow S^1$ genau einen Fixpunkt und der Abstand von zwei Elementen in S^1 unter A_{f^n} bleibt genau dann erhalten, wenn die Elemente gleich sind. Da aber f_*^n die Länge von $[\gamma]$ erhalten muss, müssen die Randrichtungen von $[\gamma]$ in S^1 zusammenfallen, also die Endpunkte einen Abstand von $0 \pmod{\pi}$ haben. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda \not\equiv 0 \pmod{\pi}$.
- (iii) Sei jetzt die Ableitung von f hyperbolisch. Ähnlich wie in (ii) hat $A_f: S^1 \rightarrow S^1$ genau zwei Fixpunkte (das kann man ausrechnen). Da die Randrichtungen von $[\gamma]$ von A_f^n (was nicht die Identität sein kann) fixiert werden müssen und kein Nicht-Fixpunkt auf einen Fixpunkt abgebildet werden kann, müssen die Randrichtungen schon Fixpunkte von A_f sein. □

Korollar 4.47 (Drehkomponenten der Chamanara-Fläche). Die wilde Singularität der Chamanara-Fläche hat unendlich viele Drehkomponenten von endlicher Länge.

Beweis. Wie wir in Beispiel 1.37 gesehen haben, gibt es auf der Chamanara-Fläche Zylinderzerlegungen. Man kann nachrechnen, dass die Moduli der Zylinder in Abbildung 1.11 alle gleich $\frac{51}{4}$ sind. Aus Proposition 5.3 bzw. Beispiel 5.5 aus dem nächsten Abschnitt können wir dann schließen, dass die Veechgruppe der Chamanara-Fläche ein parabolisches Element enthält, das nicht $\pm I$ ist. Da es aber auf der Chamanara-Fläche mindestens eine Drehkomponente von Länge $\frac{\pi}{2}$ gibt, folgt aus Satz 8, dass es unendlich viele Drehkomponenten von endlicher Länge gibt. \square

5 Ergodentheorie

In Abschnitt 1.2 haben wir uns etwas mit Billards und ihrer Entfaltung beschäftigt. Interessante Fragestellungen in diesem Bereich sind, ob es geschlossene Billardbahnen gibt (siehe Forschungsfrage 1.28), welche Bahnen dicht auf dem Tisch sind oder welche irgendwann in einer Singularität verschwinden.

Diese Fragen kann man auch für Translationsflächen im Allgemeinen stellen und bekommt dadurch einige Aussagen über dynamische Eigenschaften von Translationsflächen. Die bekannteste und früheste Aussage in diesem Kontext ist die Gültigkeit der Veech-Dichotomie für endliche Veechflächen. Für diese wollen wir einen Beweis skizzieren und uns einen Überblick über die vielen Verallgemeinerungen verschaffen, die seit dem Erscheinen des Originalartikels [Vee89] bewiesen worden sind. Da wir aber für den Beweis der Veech-Dichotomie für endliche Veechflächen eine Aussage benötigen, die schon für sich genommen sehr interessant ist, wollen wir im ersten Abschnitt mit dieser beginnen.

Wer nach dem danach folgenden, kurzen Einblick mehr zu dynamischen Systemen und Translationsflächen wissen will, kann das zum Beispiel in [MT02] nachlesen.

5.1 Parabolische Elemente und Zylinderzerlegungen

Für den Beweis der Veech-Dichotomie werden wir Proposition 5.2 benötigen, in der Trajektorien verwendet werden. Diese können wir eigentlich erst in Abschnitt 5.3 definieren, für den hier benötigten Spezialfall haben wir aber schon genügend Vorkenntnisse.

Definition 5.1 (Trajektorie)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche. Dann können die Geodätischen auf (X, ω) durch „ \subseteq “ teilgeordnet werden. Wir nennen eine maximale Geodätische bezüglich dieser Teilordnung eine *Trajektorie (des geodätischen Flusses)*.

Wählen wir eine Richtung und einen Punkt in X , so gibt es genau eine Trajektorie in diese Richtung durch diesen Punkt.

Proposition 5.2 (Parabolische Elemente und Trajektorien)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche und $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist jede horizontale Trajektorie geschlossen oder eine Sattelverbindung.

Beweis. Ist X ein Torus, dann betrachten wir auf X eine hebbare Singularität. Diese können wir mit den Bezeichnungen wie in Beispiel 4.9 so wählen, dass sie zu den Punkten im Gitter Λ_B gehört, das von jeder affinen Abbildung (bis auf Translation) erhalten werden muss. Dadurch ändert sich also die affine Gruppe, nicht aber die Veechgruppe.

Deshalb können wir im Folgenden ohne Einschränkung davon ausgehen, dass (X, ω) Singularitäten und damit auch horizontale Sattelverbindungen oder Trajektorien hat.

Wähle $\tilde{\varphi} \in \text{Aff}^+(X, \omega)$ so, dass $\text{der}(\tilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt und bezeichne mit φ die Fortsetzung von $\tilde{\varphi}$ auf \overline{X} . Sei $H := \{h_1, \dots, h_k\}$ die Menge der horizontalen Trajektorien, die von einer Singularität ausgehen, also die Menge der horizontalen Separatrizes und Sattelverbindungen. Diese Menge ist ebenso wie die Menge der Singularitäten von (X, ω) nichtleer und endlich. Da φ sowohl die Menge der Singularitäten als auch H erhält, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\psi := \varphi^n$ jede Singularität und alle Elemente von H erhält.

Ebenso wie φ erhält auch ψ die horizontale Richtung und damit ist $\psi|_{h_i}$ für alle $i = 1, \dots, k$ eine Translation. Ist weiterhin σ_i die Singularität, in der h_i beginnt, dann gilt $\psi|_{h_i}(\sigma_i) = \sigma_i$ und damit $\psi|_{h_i} = \text{id}$. Insgesamt folgt also $\psi|_H = \text{id}$. Diese Aussage werden wir etwas später benötigen.

Wir zeigen als nächstes, dass jedes Element von H eine Sattelverbindung ist. Nehme dazu an, dass $h_i \in H$ keine Sattelverbindung wäre. Dann ist h_i eine Separatrix und in eine Richtung unbeschränkt lang (dadurch ist h_i im Allgemeinen auch nicht mehr abgeschlossen). Wir zeigen nun, dass es eine offene Teilmenge U von X gibt, so dass $h_i \cap U$ dicht in U ist, um daraus einen Widerspruch zur Annahme herzuleiten. Ist P ein Punkt auf h_i und v eine vertikale Geodätische, die in P beginnt, dann genügt es für die Existenz von U zu zeigen, dass in einer Umgebung von P alle Punkte von v in $\overline{h_i}$ liegen (siehe Abbildung 5.1).

Sei also v eine solche Geodätische. Da die Anzahl der Singularitäten endlich ist, gibt es nur endlich viele horizontale Geodätische, die in einem Punkt von v beginnen und in einer Singularität enden. Sei v' ein geodätisches Segment von v (das in P beginnt und in einem Punkt P' endet), so dass keine horizontale Geodätische, die in einem Punkt von $v' \setminus \{P\}$ beginnt, in einer Singularität endet. Verschiebe nun v' entlang h_i und betrachte das Rechteck, das dabei überstrichen wird. Da der Flächeninhalt dieses Rechtecks monoton steigt, aber der Flächeninhalt von X beschränkt ist, muss eine verschobene Kopie von v' zu irgendeinem Zeitpunkt v' wieder schneiden. Insbesondere schneidet also die horizontale Trajektorie durch P (d. h. h_i) oder die horizontale Trajektorie durch P' die Geodätische v' . Im zweiten Fall gibt es dann eine horizontale Trajektorie h'_i , die durch einen Punkt $P'' \in v'$ und durch P geht. Da h_i und h'_i horizontale Trajektorien durch P sind, gilt $h_i = h'_i$. Damit schneidet h_i in jedem Fall die vertikale Geodätische v in einem Punkt P'' .

Wir nehmen nun an, dass es einen Punkt Q im Inneren der Geodätischen von P nach P'' gibt, der nicht in $\overline{h_i}$ liegt. Aus der Abgeschlossenheit von $\overline{h_i}$ folgt dann, dass es ein möglichst langes, offenes geodätisches Segment I von v gibt, das Q enthält und leeren Schnitt mit $\overline{h_i}$ hat. Sei Q' der Endpunkt von I , der näher bei P liegt. Dann ist $Q' \in \overline{h_i}$ und damit sind auch alle Punkte der horizontalen Trajektorie durch Q' in $\overline{h_i}$ enthalten. Andererseits lässt sich aber wie oben durch ein Flächeninhalts-Argument zeigen, dass die horizontale Trajektorie durch Q' geschlossen ist oder die Geodätische I schneidet. Ersteres ist nicht möglich, da Q' im Inneren der Geodätischen von P nach P'' liegt und h_i unendlich lang ist. Letzteres würde aber bedeuten, dass der Schnittpunkt der Geodätischen mit I sowohl Element von $\overline{h_i}$ als auch von I wäre, was nach Definition von I ausgeschlossen war. Also gibt es keinen solchen Punkt Q und es liegen alle Punkte der Geodätischen von P nach P'' auch in $\overline{h_i}$. Damit gibt es eine offene Teilmenge U von X ,

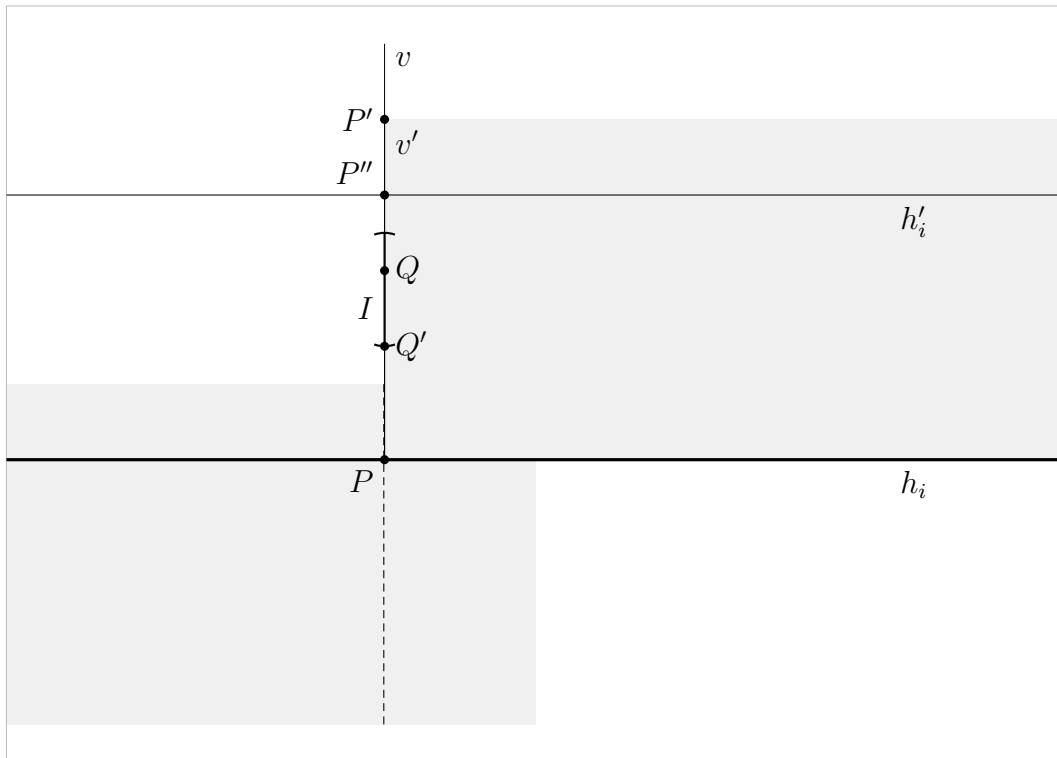


Abbildung 5.1: Skizze zur Verdeutlichung des Beweises, dass es keine Separatrizes gibt

die die Geodätische von P nach P'' enthält und in der $h_i \cap U$ dicht ist.

Wegen $\psi|_{h_i} = \text{id}$ folgt dann $\psi|_U = \text{id}$ und damit $\psi = \text{id}$. Das ist aber ein Widerspruch zu

$$\text{der}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I = \text{der}(\text{id}).$$

Also ist H die Menge der horizontalen Sattelverbindungen.

Es bleibt uns jetzt noch der Beweis, dass alle horizontalen Trajektorien, die keine Sattelverbindungen sind, geschlossen sind. Diesen führen wir wieder durch Widerspruch: Sei h eine horizontale Trajektorie, die keine Sattelverbindung ist. Angenommen, h ist nicht geschlossen. Dann muss h unendlich lang sein.

Fall 1: Die Trajektorie h ist nicht dicht in \bar{X} . Dann gibt es ein $P \in \partial\bar{h}$. Betrachte eine horizontale Trajektorie g durch P und eine vertikale Geodätische v , die in P beginnt. Wäre g unendlich lang, dann könnte man wie oben zeigen, dass g die Geodätische v in einem weiteren Punkt P'' und das Spiegelbild von v an g in einem Punkt P''' schneidet. Ebenfalls wie oben sähe man, dass sowohl die Geodätische von P nach P'' als auch die Geodätische von P nach P''' in \bar{h} liegen. Damit wäre P aber nicht in $\partial\bar{h}$. Also ist g nicht unendlich lang, sondern geschlossen oder eine Sattelverbindung.

Fall 2: Die Trajektorie h ist dicht in \bar{X} . Dann gibt es eine horizontale Sattelverbindung, die nichtleeren Schnitt mit \bar{h} hat.

In beiden Fällen gibt es also eine horizontale Sattelverbindung oder geschlossene Geodätische, die nichtleeren Schnitt mit \bar{h} hat. Da aber h parallel zu diesen Sattelverbindungen und geschlossenen Geodätischen ist und ihnen daher nicht beliebig nahe kommen kann, erhalten wir einen Widerspruch. Also kann h nicht unendlich lang sein und muss daher geschlossen sein. \square

Die folgende Proposition benötigen wir nicht nur in Abschnitt 5.2 für den Beweis der Veech-Dichotomie, sondern wir können sie auch verwenden, um einen Zusammenhang zu den in Definition 1.35 definierten Zylinderzerlegungen herzustellen:

Proposition 5.3 (Zylinderzerlegungen und parabolische Elemente)

Sei (X, ω) eine endliche Translationsfläche.

- (i) Zu jeder Zylinderzerlegung auf (X, ω) , für die alle Moduli ganzzahlige Vielfache einer festen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ sind, gibt es ein parabolisches Element in $\text{GL}^+(X, \omega)$.
- (ii) Besitzt (X, ω) mindestens eine Singularität, so gibt es zu jedem parabolischen Element in $\text{GL}^+(X, \omega) \setminus \{\pm I\}$ eine Zylinderzerlegung auf (X, ω) .

Beweis. (i) Sei $k \cdot \alpha$ das kleinste gemeinsame Vielfache aller Moduli. Zunächst nehmen wir an, dass die Zylinderzerlegung horizontal ist und definieren für diesen Fall die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & k \cdot \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A definiert auf jedem Zylinder einen sogenannten (eventuell *multiplen*) *Twist* und lässt dabei die Zylinderränder fest (siehe Abbildung 5.2). Dadurch lassen sich die

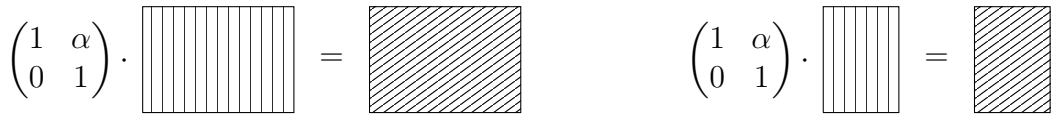


Abbildung 5.2: Twist eines parabolischen Elements auf einem Zylinder

Aktionen auf den einzelnen Zylindern zu einer affinen Abbildung zusammensetzen und es gilt $A \in \text{GL}^+(X, \omega)$.

Ist die Zylinderzerlegung nicht horizontal, so betrachte eine Drehmatrix D , die die Richtung der Zylinderzerlegung auf die Horizontale abbildet. Dann ist $A \in \text{GL}^+(X, D \cdot \omega)$ und damit $D^{-1}AD \in \text{GL}^+(X, \omega)$.

Sowohl A als auch $D^{-1}AD$ definieren parabolische Elemente, da die Spur von $D^{-1}AD$ gleich der Spur von A und damit 2 ist.

(ii) Zunächst sei das parabolische Element gegeben als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}^+(X, \omega) \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}^+(X, \omega).$$

Dann wissen wir aus Proposition 5.2 bzw. in Analogie dazu, dass alle horizontalen Trajektorien geschlossen oder Sattelverbindungen sind.

Um jede geschlossene horizontale Trajektorie gibt es dann eine ϵ -Umgebung, in der ebenfalls nur geschlossene horizontale Trajektorien liegen. Dadurch lassen sich Zylinder auf (X, ω) definieren. Geht man zu maximalen Zylindern über, so erhält man eine horizontale Zylinderzerlegung.

Ist das parabolische Element nicht von der angegebenen Form, können wir es durch Konjugation in diese Form bringen. Da die Determinante jedes parabolischen Elements 1 ist und die Spur ± 2 , ist das charakteristische Polynom $X^2 \pm 2X + 1$. Damit hat es also den Eigenwert 1 oder -1 . Die Richtung eines zugehörigen Eigenvektors nennen wir die *Eigenrichtung* des parabolischen Elements. Wir drehen nun die Translationsfläche so, dass die Eigenrichtung auf die horizontale Richtung abgebildet wird. Unter der entsprechenden Konjugation der Veechgruppe wird das parabolische Element dann auf eines der obigen Form abgebildet, denn das konjugierte Element hat den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1 bzw. -1 , also ist die erste Spalte $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und die Spur muss wieder ± 2 sein. \square

Bemerkung 5.4 (Parabolische Elemente und Moduli der Zylinder). Sei (X, ω) wie in Proposition 5.3 (ii) eine endliche Translationsfläche, deren Veechgruppe ein parabolisches Element enthält. Dann ist die zugehörige affine Abbildung ψ (definiert wie in Proposition 5.2) ein Twist bzw. multipler Twist auf jedem der Zylinder, deren Existenz in

Proposition 5.3 (ii) bewiesen wird. Für einen dieser (ohne Einschränkung horizontalen) Zylinder mit Modulus μ , auf dem ψ als k -facher Twist operiert, gilt deshalb

$$\text{der}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k \cdot \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $\mu = \frac{n}{k}\alpha$ für diesen Zylinder und damit sind die Moduli aller Zylinder der Zylinderzerlegung, die nach Proposition 5.3 existiert, jeweils rationale Vielfache einer festen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiel 5.5 (Proposition 5.3 (i) für nicht-endliche Translationsflächen). In Proposition 5.3 (i) benötigen wir im Beweis nicht, dass die Translationsfläche endlich ist. Die benötigte Zylinderzerlegung kann sogar aus unendlich vielen Zylindern bestehen, aber es dürfen nur endlich viele Moduli auftreten und diese müssen wie oben vorausgesetzt ganzzahlige Vielfache einer festen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ sein. Daher lässt sich Proposition 5.3 (i) auch auf die Zylinderzerlegung der Chamanara-Fläche anwenden, die wir in Beispiel 1.37 betrachtet haben.

5.2 Veech-Dichotomie

In der Sprache von Billards besagt die Veech-Dichotomie, dass für eine feste Richtung entweder jede Bahn, die nicht in einer Ecke des Tisches endet, dicht ist oder jede solche Bahn geschlossen ist. Wir wollen diese zunächst am Beispiel des Torus untersuchen und dann eine allgemeinere Klasse von Translationsflächen kennenlernen, für die die Veech-Dichotomie ebenfalls gilt.

Beispiel 5.6 (Veech-Dichotomie für den Torus). Betrachte einen quadratischen Billardtisch, dessen Seiten alle die Länge 1 haben. Entfaltet man diesen Tisch, so erhält man eine Translationsfläche aus vier Quadraten, die so miteinander verklebt werden, dass ein Torus entsteht.

Betrachte auf diesem Tisch eine Billardbahn, die nicht in einer Ecke endet. Durch elementargeometrische Argumente kann man zeigen: Hat die Bahn rationale Steigung (oder Steigung unendlich), dann kommt die Kugel nach endlicher Zeit wieder am Ausgangspunkt an, die Bahn ist also geschlossen. Hat die Bahn irrationale Steigung, so kommt die Kugel jedem Punkt auf dem Tisch beliebig nahe, die Bahn ist also dicht.

Insgesamt ist also auf der Translationsfläche für eine rationale Richtung jede Trajektorie in diese Richtung geschlossen oder Sattelverbindung und für eine irrationale Richtung jede Trajektorie dicht.

Auch wenn es im letzten Beispiel nicht aufgefallen ist, so war doch entscheidend, dass die Veechgruppe der betrachteten Translationsfläche $SL(2, \mathbb{Z})$ und damit ein Gitter ist. Wir wollen dieser Eigenschaft einen Namen geben:

Definition 5.7 (Veechfläche)

Eine (endliche) Translationsfläche heißt (*endliche*) *Veechfläche*, wenn ihre Veechgruppe ein Gitter ist.

Satz 9 (Veech-Dichotomie)

Sei (X, ω) eine endliche Veechfläche. Dann erfüllt (X, ω) die Veech-Dichotomie: Jede geodätische Bahn ist entweder geschlossen (bzw. eine Sattelverbindung) oder dicht.

Genauer: Für eine vorgegebene Richtung sind entweder alle Trajektorien in diese Richtung geschlossen oder Sattelverbindungen oder alle Trajektorien in diese Richtung kommen jedem Punkt beliebig nahe und sind dann sogar gleichverteilt¹.

Beweis. Für den Beweis, wie ihn Veech geführt hat, benötigt man Aussagen über den sogenannten Teichmüllerraum. Da wir diese ohne längere Einführung in das Thema nicht beweisen und auch nicht formulieren können, werden wir die benötigten Aussagen nur beim Namen nennen und nicht ausführlich zitieren:

- Masurs Kriterium: Dieses Kriterium bringt die Dynamiken auf der Fläche mit den Dynamiken im Teichmüllerraum zusammen, siehe beispielsweise den Originalartikel [Mas92, Theorem 1.1] oder den späteren Übersichtsartikel [Mas06, Theorem 3].
- Lemma von Vorobets: Dieses Lemma ist ein Spezialfall der Aussage, dass jedes Gitter, das nicht kokompakt ist, ein parabolisches Element enthält, siehe [Kat92, Corollary 4.2.7]. Spezieller wird die Aussage dadurch, dass aus einer zusätzlichen Voraussetzung über den Teichmüllerraum schon die Form des parabolischen Elements folgt, siehe [Vor96, Lemma 3.7].

Aus einer Kombination von Masurs Kriterium und dem Lemma von Vorobets erhalten wir: Erfüllt eine Bahn in die vertikale Richtung nicht die als zweites genannte Eigenschaft, ist sie also nicht dicht und gleichverteilt, dann folgt mit den oben angedeuteten Aussagen, dass es ein $\alpha \neq 0$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$$

gilt. Analog zu Proposition 5.2 können wir dann folgern, dass jede vertikale Trajektorie geschlossen oder eine Sattelverbindung ist.

Für jede andere als die vertikale Richtung können wir wieder durch Drehen der Translationsfläche (und damit Konjugieren der Veechgruppe) die Situation auf die schon beschriebene zurückführen. \square

Korollar 5.8 (Notwendiges Kriterium für Veechfläche). Sei (X, ω) eine endliche Veechfläche. Dann gibt es für jede maximale Zylinderzerlegung eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass die Moduli aller Zylinder ganzzahlige Vielfache von α sind.

Beweis. Wir nehmen wieder ohne Einschränkung an, dass die Zylinderzerlegung vertikal ist. Dann sind alle vertikalen Trajektorien periodisch oder Sattelverbindungen und insbesondere nicht dicht. Wie im Zwischenschritt im Beweis von Satz 9 gilt dann für ein $\alpha' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^+(X, \omega)$$

¹Wir können an dieser Stelle noch nicht genau formulieren, wie Gleichverteiltheit zu verstehen ist, werden das aber in Bemerkung 5.14 nachholen.

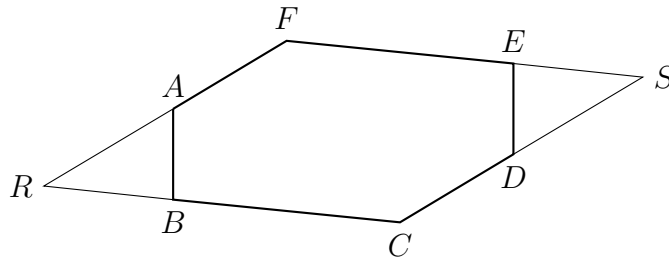


Abbildung 5.3: Billardtisch, auf dem die Veech-Dichotomie nicht gilt

Die zugehörige Zylinderzerlegung zu diesem parabolischen Element, die es nach Proposition 5.3 gibt, ist dann gerade die vertikale Zylinderzerlegung, mit der wir begonnen haben. In Bemerkung 5.4 haben wir festgehalten, dass die Moduli dieser Zylinderzerlegung rationale Vielfache von α' sein müssen. Durch Multiplikation von α' mit den endlich vielen Nennern erhalten wir die gewünschte Zahl α . \square

Da wir [Vor96, Lemma 3.7] nicht bewiesen und auch nicht vollständig zitiert haben, ist nicht deutlich geworden, wozu die Voraussetzung der Gittereigenschaft der Veechgruppe benötigt wird. Um uns zu versichern, dass sie jedenfalls nicht weggelassen werden kann, wollen wir uns noch ein Beispiel aus der Welt der Billards anschauen:

Beispiel 5.9 (Galperintisch). Betrachte den Galperintisch, einen parallelogrammförmigen Billardtisch wie in Abbildung 5.3: Sei zunächst $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck, so dass gegenüberliegende Seiten parallel und gleichlang sind, die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ senkrecht auf der Geraden AF steht und die Winkelhalbierende von $\angle FBA$ senkrecht auf der Geraden BC steht. Weiter sei R der Schnittpunkt der Geraden BC und AF und S der Schnittpunkt der Geraden CD und EF . Wir interessieren uns nun für den Billardtisch $RCSF$.

Betrachte eine Bahn, die in einem Punkt im Inneren des Sechsecks beginnt und zunächst parallel zur Geraden AB verläuft. Durch elementargeometrische Argumente kann man zeigen, dass jedes Teilstück der Bahn parallel zu einer der Geraden AB , BF oder CA ist. Insbesondere bewegt sich die Kugel nur im Inneren des Sechsecks $ABCDEF$, die Bahn ist also nicht dicht. Wählen wir zusätzlich noch einen geeigneten Startpunkt, dann ist die Bahn auch nicht periodisch. Sie ist dann aber dicht in $ABCDEF$.

Der Galperintisch erfüllt also die Veech-Dichotomie nicht.

5.3 Alternative Formulierung und Verallgemeinerungen der Veech-Dichotomie

Wir wollen uns nun von der Sprache der Billards etwas lösen und die Veech-Dichotomie in der Sprache der dynamischen Systeme formulieren. Dazu müssen wir zunächst noch ein paar Vokabeln lernen.

Definition 5.10 (Fluss)

Ein *Fluss* auf einer Menge X ist eine Aktion von \mathbb{R} auf X .

Hat die Menge X noch zusätzliche Struktur, so soll diese von der Aktion meist erhalten werden: So sollen Flüsse auf topologischen Räumen stetig sein und solche auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten auch differenzierbar. Welche Bedingungen man an einen Fluss auf einer Translationsfläche stellen sollte, wird unterschiedlich gesehen, ist für uns aber auch nicht so relevant, da wir uns hauptsächlich mit einem konkreten Fluss beschäftigen werden:

Beispiel 5.11 (Geodätischer Fluss). Der geodätische Fluss auf einer Translationsfläche (X, ω) in Richtung $\theta \in S^1$ ist folgendermaßen definiert: Sei v_θ der Einheitsvektor in Richtung θ auf \mathbb{C} . Gibt es für $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ eine Geodätische, die in x beginnt und deren Holonomievektor $r \cdot v_\theta$ ist, dann ist $r \cdot x$ definiert als der Endpunkt dieser Geodätischen. Gibt es keine solche Geodätische, dann ist $r \cdot x$ nicht definiert.

Der Ausdruck $r \cdot x$ ist nur dann nicht definiert, wenn der Strahl mit Richtung θ , der in x beginnt, die Fläche X verlässt, also in eine Singularität hineinläuft. Manchmal definiert man deshalb dann auch, dass $r \cdot x$ diese Singularität ist.

Nun können wir die versprochene allgemeinere Definition von Trajektorie nachholen:

Definition 5.12 (Trajektorie)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und F ein Fluss darauf. Eine *Trajektorie* von F ist die Bahn eines Punktes unter F .

Für die Trajektorien des geodätischen Flusses fällt diese allgemeinere Definition mit Definition 5.1 zusammen.

Definition 5.13 (Periodischer, ergodischer und eindeutig ergodischer Fluss)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und F ein Fluss darauf.

- (i) Der Fluss F heißt *periodisch*, wenn alle Trajektorien, die für alle Zeitpunkte bzw. auf ganz \mathbb{R} definiert sind, geschlossen sind.
- (ii) Der Fluss F heißt *ergodisch* in Bezug auf ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf X , wenn F maßerhaltend ist und jede messbare Menge $Y \subseteq X$ mit $F^{-1}(Y) = Y$ Maß 0 oder 1 hat.
- (iii) Der Fluss F heißt *eindeutig ergodisch*, wenn es genau ein unter F invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf X gibt. (Es folgt dann, dass F ergodisch in Bezug auf dieses eindeutige invariante Maß ist.)

Bemerkung 5.14 (Äquivalente Formulierung der Veech-Dichotomie). Aus Sicht der dynamischen Systeme wird die Veech-Dichotomie meist folgendermaßen formuliert: In jede Richtung ist der geodätische Fluss entweder periodisch oder eindeutig ergodisch.

Unter den Voraussetzungen von Satz 9 gilt, dass eindeutig ergodisch damit gleichbedeutend ist, dass jede Trajektorie dicht und gleichverteilt ist. Dabei ist mit *Gleichverteiltheit*

einer Trajektorie gemeint, dass für einen Fluss F auf einer endlichen Fläche X mit Maß μ und jedes messbare Kompaktum $K \subseteq X$ und jeden Punkt $x \in X$ gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2r} \mu_{\mathbb{R}}(\{t \in [-r, r] : F(t, x) \in K\}) = \frac{\mu(K)}{\mu(X)}$$

Weiter sind für einen periodischen Fluss alle Trajektorien geschlossen oder Sattelverbindungen. Damit können wir also die hier gegebene Formulierung durch Flüsse in die Formulierung aus Satz 9 durch Bahnen übersetzen.

In den letzten 25 Jahren sind viele Verallgemeinerungen der Veech-Dichotomie bewiesen worden, zum Beispiel aktuell eine effektive Version von Matt Bainbridge und Martin Möller. Sie haben für endliche Veechflächen gezeigt, dass es Schranken für bestimmte Invarianten wie die Länge von geschlossenen Geodätischen gibt. Hier wollen wir uns jedoch auf Varianten der Veech-Dichotomie für nicht-endliche Translationsflächen beschränken. Die erste stammt aus dem Artikel [Tre14] von Rodrigo Treviño, ist dort aber nicht die Hauptaussage, sondern folgt aus einer viel allgemeineren Aussage.

Proposition 5.15 (Schwache Veech-Dichotomie)

Ist (X, ω) eine Veechfläche von unendlichem Geschlecht mit endlichem Flächeninhalt, dann gilt eine schwache Veech-Dichotomie, genauer: Für jede Richtung ist der geodätische Fluss entweder ergodisch oder es gibt ein parabolisches Element in der Veechgruppe, das diese Richtung als Eigenrichtung hat.

Beweis. Ähnlich wie im Beweis der klassischen Veech-Dichotomie wird hier $\mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega)$ betrachtet: Verlässt die Bahn von (X, ω) unter dem Analogon zum Teichmüllerfluss nicht jede kompakte Teilmenge von $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{GL}^+(X, \omega)$, dann ist der horizontale geodätische Fluss ergodisch (siehe [Tre14, Theorem 1]). Verlässt die Bahn von (X, ω) aber jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega)$, verschwindet die Bahn in einer Spitze von $\mathbb{H}/\mathrm{GL}^+(X, \omega)$. In diesem Fall kann man wieder zeigen, dass es ein parabolisches Element gibt, das die horizontale Richtung erhält. \square

Gerne würde man diese schwache Veech-Dichotomie so formulieren, dass für jede Richtung der geodätische Fluss entweder periodisch oder ergodisch ist. Die Periodizität könnte man wie im endlichen Fall aus der Existenz einer Zylinderzerlegung folgern, aber dafür muss man noch folgende Frage positiv beantworten:

Forschungsfrage 5.16. Gilt auch bei nicht-endlichen Translationsflächen von endlichem Flächeninhalt, dass aus der Existenz eines parabolischen Elements folgt, dass es eine Zylinderzerlegung in die Eigenrichtung des parabolischen Elements gibt?

Allerdings ist bisher kein Beispiel für eine Translationsfläche bekannt, die alle in Proposition 5.15 geforderten Eigenschaften erfüllt. Das führt zu folgender Frage:

Forschungsfrage 5.17. Gibt es eine Translationsfläche von unendlichem Geschlecht mit endlichem Flächeninhalt, deren Veechgruppe ein Gitter ist?

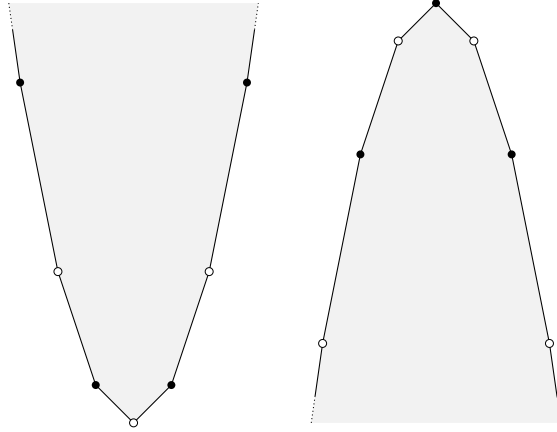


Abbildung 5.4: Parabelfläche von Hooper: parallele Seiten werden verklebt

Eine andere Verallgemeinerung gilt nur für den Spezialfall einer einzigen Fläche, gibt aber Hinweise, mit welchen Methoden sich weitere Verallgemeinerungen beweisen lassen.

Beispiel 5.18 (Parabelfläche von Hooper). Betrachte die konvexe Hülle der Punkte

$$\{(n, n^2) : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, -n^2) : n \in \mathbb{Z}\}$$

und identifiziere parallele Kanten (siehe Abbildung 5.4). Die dadurch eindeutig beschriebene nicht-endliche Translationsfläche (S, ω_S) hat unendlichen Flächeninhalt, unendliches Geschlecht, zwei helikale Singularitäten und ein Ende. Einige weitere Eigenschaften wie beispielsweise die Veechgruppe dieser Translationsfläche wurden von Patrick Hooper in [Hoo08, Hoo14] ausführlich beschrieben.

Für diese Parabelfläche gilt zwar nicht die Veech-Dichotomie, aber eine sogenannte Trichotomie. Zur Formulierung dieser Trichotomie benötigen wir noch eine weitere Eigenschaft, die Flüsse aufweisen können und die wir bisher nicht kennengelernt haben:

Definition 5.19 (Rekurrenz)

Sei (X, ω) eine Translationsfläche und F ein Fluss darauf.

- (i) Ein Punkt $x \in X$ heißt *rekurrent* unter F , wenn es für jede Umgebung U von x und jedes $r \in \mathbb{R}_+$ ein $r' > r$ gibt mit $F(r', x) \in U$.
- (ii) Der Fluss F heißt *rekurrent*, wenn fast jeder Punkt unter F rekurrent ist.

Proposition 5.20 (Trichotomie für Parabelfläche von Hooper)

Für den geodätischen Fluss auf (S, ω_S) mit Steigung $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gilt:

- (i) Ist $m = \frac{p}{q}$ rational mit p, q teilerfremd und q ungerade, dann ist der geodätische Fluss periodisch.

(ii) Ist $m = \frac{p}{q}$ rational mit p, q teilerfremd und q gerade, dann lässt sich die Translationsfläche in unendlich lange Streifen zerlegen. Weiterhin gibt es keine Sattelverbindungen mit dieser Steigung und jede Separatrix mit dieser Steigung verlässt jedes Kompaktum.

(iii) Ist m irrational, dann ist der geodätische Fluss rekurrent. Weiterhin gibt es keine geschlossenen Geodätischen und keine Sattelverbindungen mit dieser Steigung.

Beweis. Diese Aussage wird in [Hoo08, Corollary 14] gezeigt, wobei hauptsächlich zwei Ergebnisse verwendet werden: In [Hoo08, Proposition 6] wird gezeigt, dass es genau im Fall (i) Sattelverbindungen gibt, woraus sich sowohl (i) als auch (ii) folgern lassen. Dabei geht ein, dass sich die Betrachtung jeder rationalen Richtung zurückführen lässt auf die Betrachtung der horizontalen, vertikalen und diagonalen (mit Steigung 1) Richtung. Außerdem sagt [Hoo08, Theorem 13] aus, dass der geodätische Fluss für irrationale Steigung rekurrent ist, also die Hauptaussage von (iii). \square

5.4 Anwendung auf das Ehrenfest'sche Wind-und-Bäume-Modell

Im Jahr 1911 haben die Physiker Paul und Tatjana Ehrenfest in [EE11, Abschnitt 5] ein Modell aufgestellt, mit dem sie Gasteilchenbewegungen beschrieben haben. Das sehr einfache Modell besteht aus rechteckigen „Bäumen“, die zufällig, aber mit gleicher Ausrichtung auf einer Ebene verteilt sind, und „Wind“-Partikeln, die sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit über diese Ebene bewegen und an den Bäumen reflektiert werden. Diese Veranschaulichung wird allerdings in [EE11] noch nicht verwendet, weswegen auch der heute verwendete Name *Wind-und-Bäume-Modell* (englisch *wind-tree model*) in diesem Artikel nicht genannt wird.

Paul und Tatjana Ehrenfest haben das Modell, das sie selbst „aufs Äußerste vereinfacht“ nennen, zur statistischen Interpretation des zweiten Gesetzes der Thermodynamik verwendet und daran gezeigt, welche Auswirkungen die Anwendung des Stoßzahlansatzes von Boltzmann hat. Dieser kann beispielsweise verwendet werden, um Aussagen darüber zu machen, wie sich die Strömung in einem verdünnten Gas verhält.

Seit etwa zehn Jahren gibt es nun einige neue Versuche, mit mathematischen Methoden Eigenschaften des Windes in diesem Modell herauszufinden. Dazu wird die Ebene als Kopie von \mathbb{C} aufgefasst, die Rechtecke sind alle gleich groß und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Gitter in \mathbb{R}^2 , meist wird dafür \mathbb{Z}^2 gewählt (*periodisches Wind-und-Bäume-Modell*). Fasst man nun diese Ebene als Billardtisch auf, erhält man die Bahn der „Wind“-Partikel als Billardbahn. Obwohl der Billardtisch unendlich groß ist und unendlich viele Kanten hat, benötigt man für die Entfaltung nur vier Kopien des Tisches, die verklebt werden. Es lassen sich also die Methoden der dynamischen Systeme auf dieses Modell anwenden und dadurch die Flüsse darin beschreiben.

Wir werden uns nun eine kleine Auswahl der aktuellen Ergebnisse zu diesen Translationsflächen anschauen. Dabei verstehen wir unter dem periodischen Wind-und-Bäume-Modell

$(X_{(a,b)}, \omega_{(a,b)})$ immer die Translationsfläche, die durch Entfaltung entsteht, wenn die Rechtecke Seitenlängen a und b mit $a, b \in (0, 1)$, haben.

Proposition 5.21 (Diffusion im Wind-und-Bäume-Modell)

Für alle $(a, b) \in (0, 1)^2$ und fast alle Richtungen $\theta \in S^1$ gilt: Im periodischen Wind-und-Bäume-Modell $(X_{(a,b)}, \omega_{(a,b)})$ ist für jeden Punkt $x \in X_{(a,b)}$ und den geodätischen Fluss F in die Richtung θ die folgende Aussage zur polynomiellen Diffusionsrate erfüllt:

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log d(x, F(r, x))}{\log r} = \frac{2}{3}.$$

Beweis. Dieses Resultat wird in [DHL14] für fast alle $(a, b) \in (0, 1)^2$ mit Techniken aus dem Bereich der Teichmüllertheorie bewiesen. Durch eine Kombination mit dem später veröffentlichten [CE15, Theorem 1.2] folgt dann, dass die Aussage für alle Seitenlängen gilt. \square

Für einen spezielleren Typ von Seitenlängen hat ein Teil der Autoren in einem anderen Artikel weitere Aussagen gezeigt:

Proposition 5.22 (Spezielle Seitenlängen für das Wind-und-Bäume-Modell)

Seien $a, b \in (0, 1)$ mit $a = \frac{p}{q}, b = \frac{r}{s}$ und $p, q, r, s \in \mathbb{N}$, jeweils p, q und r, s teilerfremd und q, s gerade. Dann gilt für das periodische Wind-und-Bäume-Modell $(X_{(a,b)}, \omega_{(a,b)})$:

- (i) Der geodätische Fluss auf $(X_{(a,b)}, \omega_{(a,b)})$ ist in fast jede Richtung rekurrent.
- (ii) Die Menge der Richtungen, in die jede Trajektorie entweder eine Separatrix oder periodisch ist, ist eine Teilmenge von \mathbb{Q} , die dicht in \mathbb{R} ist.

Beweis. Der Beweis kombiniert einige verschiedene Techniken aus dem Bereich der Translationsflächen (wie Aussagen über Zylinderzerlegungen) und der dynamischen Systeme (wie diophantische Approximation). Nachlesen kann man ihn in [HLT11, Abschnitt 3]. \square

Derselbe Artikel führt auch negative Ergebnisse auf, beispielsweise Parameter (a, b) , für die es keine Richtungen gibt, in die alle Trajektorien Separatrices oder periodisch sind. Im Gegensatz dazu gibt es aber folgende Verbesserung von obigem Resultat:

Proposition 5.23 (Rekurrenz im Wind-und-Bäume-Modell)

In jedem periodischen Wind-und-Bäume-Modell $(X_{(a,b)}, \omega_{(a,b)})$ ist der geodätische Fluss in fast jede Richtung rekurrent.

Beweis. In [AHar] werden die im vorher genannten Artikel benutzten Techniken ausgebaut, um dieses Resultat zu zeigen. \square

Definitionsverzeichnis

- 1-Form, 10
 - holomorphe, 12
- Abbildung
 - affine, 49
 - Ableitung, 51
 - eigentliche, 43
 - orientierungserhaltende, 49
 - orientierungsumkehrende, 49
- Ableitung, *siehe* Abbildung, affine
- Ableitungsabbildung, 51
- affine Gruppe einer Translationsfläche, 49
- Aktion
 - freie, 55
 - n -fach transitive, 55
 - treue, 55
- Atlas
 - komplexer, 4
 - Translations-, 5
- Basispunkt, 27
- biholomorphe Äquivalenz, 52
- Billard, 17
- Cantorbaum, 46
 - blühender, 46
- Cayleygraph, 67
- Derivation, 11
- Differentialform, 10
- Drehkomponente, 27
- eigentlich diskontinuierliche Aktion, 58
- elliptisches Element, *siehe* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, elliptisches Element
- Ende eines Strahls, 43
 - planares, 45
- Entfaltung, 18
- Eulercharakteristik, 40
- Finaltopologie, 27
- Fläche, 4
 - geschlossene, *siehe* Mannigfaltigkeit, geschlossene
 - orientierbare, 40
 - planare, 45
- Fluss, 81
 - eindeutig ergodischer, 81
 - ergodischer, 81
 - periodischer, 81
 - rekurrenter, 83
- Fuchssche Gruppe, 57
- Funktion der maximalen Länge, 28
- Geodätische, 7
- Geschlecht, 38
 - unendliches, 43
- Gitter, 58
- $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$, 51
- Gruppe
 - kokompakte, 58
- Holonomievektor, 22
- hyperbolisches Element, *siehe* $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, hyperbolisches Element
- Jakobsleiter, 46
- Karte, 4
- Komplettierung
 - metrische, 7
- Kontraktion, 64
- Konvergenz von Enden, 44
- lineare Näherung, 26

Randrichtung, 70
 Richtung, 70
 Loch-Ness-Monster, 46
 Möbiustransformation
 Aktion durch, 55
 Mannigfaltigkeit, 4
 geschlossene, 39
 mit Rand, 39
 Metrik
 flache, 6
 Orientierung, 40
 Origami, 60
 endliches, 60
 parabolisches Element, *siehe* $PSL(2, \mathbb{R})$,
 parabolisches Element
 Eigenrichtung eines, 77
 $PGL(2, \mathbb{R})$, 51
 $PSL(2, \mathbb{R})$, 55
 elliptisches Element, 56
 hyperbolisches Element, 56
 parabolisches Element, 56
 Raum der Enden, 43
 Raum der linearen Näherungen, 26
 Riemannsche Fläche, 4
 Sattelverbindung, 21
 Segment, 65
 Segmentpaar
 zulässiges, 65
 Separatrix, 21
 Singularität, 7
 hebbare, 29
 helikale, 29
 konische, 29
 wilde, 29
 $SL(2, \mathbb{R})$, 51
 Spur, 56
 Strahl
 eigentlicher, 43
 Stratum, 46
 subkompakt, 8
 Tangentialraum, 11
 Topologie auf $Ends(X)$, 45
 topologische Gruppe, 57
 totalbeschränkt, 61
 Trajektorie, 81
 des geodätischen Flusses, 73
 Translation, 49
 Translationsüberlagerung, 29
 Translationsfläche, 6
 endliche, 8, 12
 Isomorphie von, 54
 zahme, 29
 Translationsstruktur, 5
 Twist, 76
 Überlagerung, 29
 universelle, 63
 Veechfläche, 78
 endliche, 78
 Veechgruppe, 51
 erweiterte, 51
 projektive, 51
 projektive erweiterte, 51
 Vielfachheit, 29
 Weg
 einfach geschlossener, 38
 geodätischer, 7
 geschlossener, 38
 nichttrivialer, 38
 separierender, 38
 Winkelsektor, 27
 Z-K-Konstruktion, 18
 Zelle, 39
 Zellerlegung, 39
 endliche, 39
 Zylinder, 22
 Modulus, 22

Literaturverzeichnis

- [AHar] AVILA, Artur ; HUBERT, Pascal: Recurrence for the wind-tree model. In: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire* (to appear)
- [Arm83] ARMSTRONG, Mark A.: *Basic topology*. New York : Springer, 1983 (Undergraduate texts in mathematics). – ISBN 0-387-90839-0 ; 3-540-90839-0
- [AS60] AHLFORS, Lars V. ; SARIO, Leo: *Princeton mathematical series*. Bd. 26: *Riemann surfaces*. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1960. – ISBN 0-691-08027-5
- [Bow12] BOWMAN, Joshua P.: Finiteness conditions on translation surfaces. Version: 2012. <http://arxiv.org/abs/1203.1903>, Abruf: 23.08.2012. In: *Quasiconformal mappings, Riemann surfaces, and Teichmüller spaces. AMS special session in honor of Clifford J. Earle, Syracuse, NY, USA, October 2-3, 2010*. Providence, RI : American Mathematical Society, 2012. – ISBN 978-0-8218-5340-5/pbk; 978-0-8218-9029-5/ebook, 31-40
- [Bow13] BOWMAN, Joshua P.: The complete family of Arnoux-Yoccoz surfaces. In: *Geometriae Dedicata* 164 (2013), 113-130. <http://dx.doi.org/10.1007/s10711-012-9762-9>, Abruf: 19.10.2012. – DOI 10.1007/s10711-012-9762-9
- [BV13] BOWMAN, Joshua P. ; VALDEZ, Ferrán: Wild singularities of flat surfaces. In: *Israel Journal of Mathematics* 197 (2013), 69-97. <http://arxiv.org/abs/1110.1350>, Abruf: 17.08.2012
- [Cal04] CALTA, Kariane: Veech surfaces and complete periodicity in genus two. In: *Journal of the American Mathematical Society* 17 (2004), Nr. 4, S. 871-908. <http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-04-00461-8>. – DOI 10.1090/S0894-0347-04-00461-8
- [CE15] CHAIKA, Jon ; ESKIN, Alex: Every flat surface is Birkhoff and Oseledets generic in almost every direction. In: *Journal of Modern Dynamics* 9 (2015), 1-23. <http://dx.doi.org/10.3934/jmd.2015.9.1>, Abruf: 28.08.2013. – DOI 10.3934/jmd.2015.9.1. – ISSN 1930-5311
- [Cha04] CHAMANARA, Reza: Affine automorphism groups of surfaces of infinite type. In: ABIKOFF, William (Hrsg.) ; HAAS, Andrew (Hrsg.): *In the Tradition of Ahlfors and Bers, III* Bd. 355, 2004 (Contemporary mathematics), S. 123-145

- [DHL14] DELECROIX, Vincent ; HUBERT, Pascal ; LELIÈVRE, Samuel: Diffusion for the periodic wind-tree model. In: *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série* 47 (2014), Nr. 6, S. 1085–1110. – ISSN 0012–9593
- [DM68] DOYLE, P.H. ; MORAN, D.A.: A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. In: *Inventiones Mathematicae* 5 (1968), S. 160–162. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01425546>. – DOI 10.1007/BF01425546
- [EE11] EHRENFEST, Paul ; EHRENFEST, Tatjana: Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. In: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1911 (IV 32.)
- [FK36] FOX, Ralph H. ; KERSHNER, Richard B.: Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron. In: *Duke Mathematical Journal* 2 (1936), S. 147–150. <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-36-00213-2>. – DOI 10.1215/S0012-7094-36-00213-2
- [For77] FORSTER, Otto: *Heidelberger Taschenbücher*. Bd. 184: *Riemannsche Flächen*. Berlin : Springer, 1977. – ISBN 3–540–08034–1 ; 0–387–08034–1
- [Fre08] FREIDINGER, Myriam: *Stabilisatorgruppen in $\text{Aut}(F_z)$ und Veechgruppen von Überlagerungen*, Universität Karlsruhe (TH), Diplomarbeit, Oktober 2008. http://www.math.kit.edu/iag3/~finster/media/da_finster.pdf, Abruf: 01.10.2012
- [Ful97] FULTON, William: *Graduate texts in mathematics*. Bd. 153: *Algebraic topology : a first course*. corr. 2. print. New York : Springer, 1997. – ISBN 3–540–94327–7 ; 0–387–94327–7 ; 3–540–94326–9 ; 0–387–94326–9
- [Ghy95] GHYS, Etienne: Topologie des feuilles génériques. In: *Annals of Mathematics. Second Series* 141 (1995), Nr. 2, S. 387–422. <http://dx.doi.org/10.2307/2118526>. – DOI 10.2307/2118526
- [GJ00] GUTKIN, Eugene ; JUDGE, Chris: Affine mappings of translation surfaces: Geometry and arithmetic. In: *Duke Mathematical Journal* 103 (2000), Nr. 2, S. 191–213. <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-00-10321-3>. – DOI 10.1215/S0012-7094-00-10321-3
- [Har77] HARTSHORNE, Robin: *Graduate texts in mathematics*. Bd. 52: *Algebraic geometry*. New York : Springer, 1977. – ISBN 0–387–90244–9 ; 3–540–90244–9 ; 978–0–387–90244–9
- [Har03] HARPE, Pierre de l.: *Topics in Geometric Group Theory*. [Repr.]. Chicago, Ill. [u.a.] : University of Chicago Press, 2003 (Chicago lectures in mathematics). – ISBN 0–226–31721–8; 0–226–31719–6

- [Her07] HERRLICH, Frank: *Gruppen und Graphen*. Version: 2007. <http://www.math.kit.edu/iag2/~globke/seite/mitschrift/media/grugra.pdf>, Abruf: 01.03.2013. Mitschrift von Wolfgang Globke zur Vorlesung
- [HLT11] HUBERT, Pascal ; LELIÈVRE, Samuel ; TROUBETZKOY, Serge: The Ehrenfest wind-tree model: periodic directions, recurrence, diffusion. In: *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* 656 (2011), S. 223–244
- [Hoo08] HOOPER, W. P.: Dynamics on an infinite surface with the lattice property. In: *preprint* (2008), 1–48. <http://arxiv.org/abs/0802.0189>, Abruf: 10.05.2015
- [Hoo14] HOOPER, W. P.: An infinite surface with the lattice property I: Veech groups and coding geodesics. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 366 (2014), Nr. 5, 2625–2649. <http://arxiv.org/abs/1011.0700>, Abruf: 22.02.2013
- [Hub06] HUBBARD, John H.: *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*. Bd. 1: Teichmüller theory. Matrix editions : Ithaca, 2006. – ISBN 0–9715766–2–9; 978–0–9715766–2–9
- [IT92] IMAYOSHI, Yoichi ; TANIGUCHI, Masahiko: *An introduction to Teichmüller spaces*. Tokyo : Springer, 1992. – ISBN 4–431–70088–9; 3–540–70088–9; 0–387–70088–9
- [Jä08] JÄNICH, Klaus: *Topologie*. 8. Auflage 2005. 2. korrigierter Nachdruck. Berlin : Springer, 2008. – ISBN 978–3–540–21393–2
- [Kat92] KATOK, Svetlana: *Fuchsian groups*. Chicago, Ill. [u.a.] : University of Chicago Press, 1992 (Chicago lectures in mathematics series). – ISBN 0–226–42583–5 ; 0–226–42582–7
- [Ker23] KERÉKJÁRTÓ, Béla v.: *Vorlesungen über Topologie. I. Flächentopologie*. Berlin : Springer, 1923 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen; Bd. 8)
- [Kü10] KÜHNLEIN, Stefan: *Einführung in die Geometrie und Topologie*. Version: September 2010. <http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/geotopo2010w/media/eingeotop.pdf>, Abruf: 09.08.2012. Skript zur Vorlesung
- [Mas86] MASUR, Howard: Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards. In: *Duke Mathematical Journal* 53 (1986), S. 307–314. <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-86-05319-6>. – DOI 10.1215/S0012–7094–86–05319–6
- [Mas92] MASUR, Howard: Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential. In: *Duke Mathematical Journal* 66 (1992), Nr. 3,

- S. 387–442. <http://dx.doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06613-0>. – DOI 10.1215/S0012-7094-92-06613-0
- [Mas06] MASUR, Howard: Ergodic theory of translation surfaces. In: *Handbook of dynamical systems. Volume 1B*. Amsterdam : Elsevier, 2006. – ISBN 0-444-52055-4/hbk, S. 527–547
- [Mat70] MATSUMURA, Hideyuki: *Commutative algebra*. New York : Benjamin, 1970 (Mathematics lecture note series). – ISBN 0-8053-7025-0 ; 0-8053-7024-2
- [McM03] MCMULLEN, Curtis T.: Billiards and Teichmüller curves on Hilbert modular surfaces. In: *Journal of the American Mathematical Society* 16 (2003), Nr. 4, S. 857–885. <http://dx.doi.org/10.1090/S0894-0347-03-00432-6>. – DOI 10.1090/S0894-0347-03-00432-6
- [MT02] MASUR, Howard ; TABACHNIKOV, Serge: Rational billiards and flat structures. In: *Handbook of dynamical systems. Volume 1A*. Amsterdam : North-Holland, 2002, S. 1015–1089
- [PSV11] PRZYTICKI, Piotr ; SCHMITHÜSEN, Gabriela ; VALDEZ, Ferrán: Veech Groups of Loch Ness Monsters. In: *Annales de l'Institut Fourier* 61 (2011), Nr. 2, 673–687. <http://dx.doi.org/10.5802/aif.2625>, Abruf: 08. 01. 2013. – DOI 10.5802/aif.2625
- [Que01] QUERENBURG, Boto v.: *Mengentheoretische Topologie*. 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin : Springer, 2001 (Springer-Lehrbuch). – ISBN 3-540-67790-9
- [Ran11] RANDECKER, Anja: *Dreiecksgruppen, die als Veechgruppen auftreten*, Karlsruher Institut für Technologie, Diplomarbeit, April 2011. http://www.math.kit.edu/iag3/~randecker/media/diplomarbeit_ar.pdf, Abruf: 28.11.2011
- [Ren07] RENTELN, Michael von: *Funktionentheorie I*. Skript zur Vorlesung, 2007
- [Ric63] RICHARDS, Ian: On the Classification of Noncompact Surfaces. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 106 (1963), Nr. 2, 259–269. <http://www.ams.org/journals/tran/1963-106-02/S0002-9947-1963-0143186-0/>, Abruf: 27.09.2012. – ISSN 00029947
- [Sch09] SCHWARTZ, Richard E.: Obtuse triangular billiards II: One hundred degrees worth of periodic trajectories. In: *Exp. Math.* 18 (2009), Nr. 2, S. 161–182. <http://dx.doi.org/10.1080/10586458.2009.10128891>. – DOI 10.1080/10586458.2009.10128891
- [Spi65] SPIVAK, Michael: *Calculus on manifolds : a modern approach to classical theorems of advanced calculus*. New York [u.a.] : Benjamin, 1965 (Mathematics monograph series)

- [Tre14] TREVIÑO, Rodrigo: On the Ergodicity of Flat Surfaces of Finite Area. In: *Geometric and Functional Analysis* 24 (2014), Nr. 1, S. 360–386. – ISSN 1016–443X; 1420–8970/e
- [Vee89] VEECH, William A.: Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. In: *Inventiones Mathematicae* 97 (1989), Nr. 3, S. 553–583
- [Vor96] VOROBETS, Yaroslav: Planar structures and billiards in rational polygons: the Veech alternative. In: *Russian Mathematical Surveys* 51 (1996), Nr. 5, S. 779–817. <http://dx.doi.org/10.1070/RM1996v051n05ABEH002993>. – DOI 10.1070/RM1996v051n05ABEH002993
- [WS11] WEITZE-SCHMITHÜSEN, Gabriela: *Von holomorphen Differentialen auf Riemannschen Flächen zu Translationsflächen*. Ausarbeitung zu einem Vortrag bei einem Seminar-Wochenende. <http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/semalggeo2011w/media/notes-translationsflaechen.pdf>. Version: November 2011, Abruf: 22.10.2012
- [WZ11] WELLEN, Felix ; ZACHHUBER, Jonathan: *Differentialformen*. Ausarbeitung zu einem Vortrag bei einem Seminar-Wochenende. <http://www.math.kit.edu/iag3/lehre/semalggeo2011w/media/differentialformen.pdf>. Version: November 2011, Abruf: 22.10.2012
- [ZK75] ZEMLYAKOV, Aleksandr N. ; KATOK, Anatole B.: Topologische Transitivität von Billards in Polygonen. In: *Mat. Zametki* 18 (1975), S. 291–300
- [ZK76] ZEMLYAKOV, Aleksandr N. ; KATOK, Anatole B.: Topological transitivity of billiards in polygons. In: *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR* 18 (1976), Nr. 2, S. 760–764. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01818045>. – DOI 10.1007/BF01818045