Mathematik am Rubikwürfel

Gabriela Weitze-Schmithüsen

Institut für Algebra und Geometrie
Fakultät für Mathematik, Karlsruher Institut für Technologie

21. Juni 2011

Worum geht es?

Ziel: Mathematische Konzepte anhand des Rubikwürfels

- Was ist das Zentrum einer Gruppe?
- Was ist das Zentrum der Rubikwürfelgruppe?
- Wie „abelsch“ ist die Rubikwürfelgruppe?

Worum geht es?

Ziel: Mathematische Konzepte anhand des Rubikwürfels

- Was ist das Zentrum einer Gruppe?
- Was ist das Zentrum der Rubikwürfelgruppe?
- Wie „abelsch“ ist die Rubikwürfelgruppe?

Notationen

Seitenscheiben:

$$\begin{aligned} R &= \text{rechte Scheibe im Uhrzeigersinn drehen.} \\ L &= \text{linke Scheibe im Uhrzeigersinn drehen.} \end{aligned}$$

O: obere Scheibe, U: untere Scheibe,
V: vordere Scheibe, H: hintere Scheibe

Mittenscheiben:

$$\begin{aligned} M_R &= \text{mittlere Scheibe parallel zur rechten Scheibe wie } R \text{ drehen.} \\ M_O &= \text{mittlere Scheibe parallel zur oberen Scheibe wie } O \text{ drehen.} \\ M_V &= \text{mittlere Scheibe parallel zur vorderen Scheibe wie } V \text{ drehen.} \end{aligned}$$

Achtung: die Manöver von rechts nach links ausführen!
Z.B. $R \circ O$ bedeutet zuerst O, dann R ausführen.

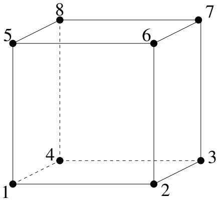
Ein paar Manöver

Was bewirken die folgenden Manöver?

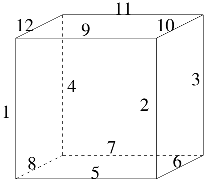
- $R^2 \circ M_U \circ R^2 \circ M_U^{-1}$
- $V^{-1} \circ L^{-1} \circ V \circ R^{-1} \circ V^{-1} \circ L \circ V \circ R$
- $(O \circ M_R)^4$

Notationen

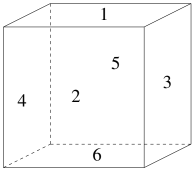
Eckenwürfelchen:



Kantenwürfelchen:



Flächenmittenwürfelchen:



Notationen

Notiere Würfelverdrehungen als 6-Tupel

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \text{ mit } \begin{array}{l} \sigma_E \in S_8, \quad \sigma_K \in S_{12}, \quad \sigma_A \in S_3, \\ x \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^8,\ y \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{12},\ z \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \end{array}$$

Gruppe

Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$, so dass

- $\circ$ *assoziativ* ist, d.h. $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- ein *neutrales Element* e enthält, d.h.:
  $\forall\, g \in G : \; e \circ g = g = g \circ e$
- und jedes Element ein *Inverses* besitzt, d.h.:
  $\forall\, g \in G \;\exists\, h \in G : \; g \circ h = e = h \circ g$

Hier: G = Menge aller möglichen Verdrehungen des Würfels
$\circ$ = Verkettung der Drehungen
e = Die „Nicht-Drehung“, die nichts tut
Inverses erhält man durch Rückwärtsdrehen

$(G, \circ)$ heißt *Rubikwürfelgruppe*.

Gruppe

Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$, so dass

- $\circ$ *assoziativ* ist, d.h. $\forall x, y, z \in G : (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- ein *neutrales Element* e enthält, d.h.:
  $\forall\, g \in G : \; e \circ g = g = g \circ e$
- und jedes Element ein *Inverses* besitzt, d.h.:
  $\forall\, g \in G \; \exists\, h \in G : \; g \circ h = e = h \circ g$

Hier: G = Menge aller möglichen Verdrehungen des Würfels
$\circ$ = Verkettung der Drehungen
e = Die „Nicht-Drehung“, die nichts tut
Inverses erhält man durch Rückwärtsdrehen

$(G, \circ)$ heißt *Rubikwürfelgruppe*.

Die Permutationsgruppe S_n

Für die Menge der Permutationen S_n ist

$$(S_n, \circ) \text{ mit } \circ = \text{Hintereinanderausführen von Permutationen}$$

auch eine Gruppe.

Die Rubikwürfelgruppe

Drei Tatsachen zur Rubikwürfelgruppe:

- Die Rubikwürfelgruppe enthält

  $$12! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{24} = 1.038.048.078.587.756.544.000 \sim 10^{21}$$

  Elemente.
- Die größte auftretende Gruppenordnung ist 1260.
- Nicht alle Sechstupel können erdreht werden.

Die Rubikwürfelgruppe

Drei Tatsachen zur Rubikwürfelgruppe:

- Die Rubikwürfelgruppe enthält

  $$12! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 3^8 \cdot 2^{12} \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{24} = 1.038.048.078.587.756.544.000 \sim 10^{21}$$

  Elemente.
- Die größte auftretende Gruppenordnung ist 1260.
- Nicht alle Sechstupel können erdreht werden.

Die Verknüpfung notiert

Was ist:

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z')?$$

Die Verknüpfung notiert

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

mit:

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

Die Verknüpfung notiert

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

mit:

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

Die Verknüpfung notiert

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

mit:

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

Die Verknüpfung notiert

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

mit:

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

Die Verknüpfung notiert

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

mit:

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

Die Verknüpfung notiert

$$(\sigma_E, \sigma_K, \sigma_A, x, y, z) \circ (\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z') = (\sigma''_E, \sigma''_K, \sigma''_A, x'', y'', z'')$$

mit:

- $\sigma''_E = \sigma_E \circ \sigma'_E$
- $\sigma''_K = \sigma_K \circ \sigma'_K$
- $\sigma''_A = \sigma_A \circ \sigma'_A$
- $x''_i = x'_i + x_{\sigma'_E(i)}$, d.h. $x'' = x' + x^{\sigma'_E}$, wobei $(x^{\sigma'_E})_i := x_{\sigma'_E(i)}$
- $y''_i = y'_i + y_{\sigma'_K(i)}$, d.h. $y'' = y' + y^{\sigma'_K}$, wobei $(y^{\sigma'_K})_i := y_{\sigma'_K(i)}$
- $z''_i = z'_i + z_{\sigma'_A(i)}$, d.h. $z'' = z' + z^{\sigma'_A}$, wobei $(z^{\sigma'_A})_i := z_{\sigma'_A(i)}$

Die Verknüpfung notiert

Das neutrale Element ist: (id, id, id, 0, 0, 0).

Das inverse Element ist: $(\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z')$ mit

- $\sigma'_E = (\sigma_E)^{-1}$
- $\sigma'_K = (\sigma_K)^{-1}$
- $\sigma'_A = (\sigma_A)^{-1}$
- $x'_i = -x_{(\sigma_E)^{-1}(i)}$
- $y'_i = -y_{(\sigma_K)^{-1}(i)}$
- $z'_i = -z_{(\sigma_A)^{-1}(i)}$.

Die Verknüpfung notiert

Das neutrale Element ist: (id, id, id, 0, 0, 0).

Das inverse Element ist: $(\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z')$ mit

- $\sigma'_E = (\sigma_E)^{-1}$
- $\sigma'_K = (\sigma_K)^{-1}$
- $\sigma'_A = (\sigma_A)^{-1}$
- $x'_i = -x_{(\sigma_E)^{-1}(i)}$
- $y'_i = -y_{(\sigma_K)^{-1}(i)}$
- $z'_i = -z_{(\sigma_A)^{-1}(i)}$.

Die Verknüpfung notiert

Das neutrale Element ist: (id, id, id, 0, 0, 0).

Das inverse Element ist: $(\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z')$ mit

- $\sigma'_E = (\sigma_E)^{-1}$
- $\sigma'_K = (\sigma_K)^{-1}$
- $\sigma'_A = (\sigma_A)^{-1}$
- $x'_i = -x_{(\sigma_E)^{-1}(i)}$
- $y'_i = -y_{(\sigma_K)^{-1}(i)}$
- $z'_i = -z_{(\sigma_A)^{-1}(i)}$.

Die Verknüpfung notiert

Das neutrale Element ist: (id, id, id, 0, 0, 0).

Das inverse Element ist: $(\sigma'_E, \sigma'_K, \sigma'_A, x', y', z')$ mit

- $\sigma'_E = (\sigma_E)^{-1}$
- $\sigma'_K = (\sigma_K)^{-1}$
- $\sigma'_A = (\sigma_A)^{-1}$
- $x'_i = -x_{(\sigma_E)^{-1}(i)}$
- $y'_i = -y_{(\sigma_K)^{-1}(i)}$
- $z'_i = -z_{(\sigma_A)^{-1}(i)}$.

Der Superflip

Was bewirkt das Manöver

$$M_{\text{super}} = (B_{OLV} \circ (O \circ M_R)^4)^3?$$

B_{OLV} hält die Achse durch die Ecken 3 und 5 fest und dreht **gegen** den Uhrzeigersinn.

Abelsche Gruppen

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn gilt:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Ist die Rubikwürfelgruppe abelsch?

Abelsche Gruppen

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn gilt:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Ist die Rubikwürfelgruppe abelsch?

Abelsche Gruppen

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn gilt:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Ist die Rubikwürfelgruppe abelsch?

Nein!

Abelsche Gruppen

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn gilt:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Ist die Rubikwürfelgruppe abelsch?

Nein!

Zum Beispiel: $R \circ O \neq O \circ R$

Abelsche Gruppen

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn gilt:

$$\forall g_1, g_2 \in G : g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$$

Ist die Rubikwürfelgruppe abelsch?

Nein!

Zum Beispiel: $R \circ O \neq O \circ R$

Wie abelsch ist die Rubikwürfelgruppe?

Das Zentrum

Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist:

$$Z(G) := \{g \in G |\, \forall\, g' \in G :\; g' \circ g = g \circ g'\},$$

also die Elemente, die mit jedem anderen Gruppenelement kommutieren.

Das Zentrum

Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist:

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall\, g' \in G: \; g' \circ g = g \circ g'\},$$

also die Elemente, die mit jedem anderen Gruppenelement kommutieren.

Es gilt:

- $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
- Je größer das Zentrum, desto „abelscher" ist die Gruppe.
- $Z(G)$ ist abelsch.
- Das neutrale Element e ist immer in $Z(G)$.
- $Z(G) = \{g \in G \mid \forall\, g' \in G: \; g' \circ g \circ g'^{-1} = g\}$

Das Zentrum

Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist:

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall\, g' \in G:\ g' \circ g = g \circ g'\},$$

also die Elemente, die mit jedem anderen Gruppenelement kommutieren.

Es gilt:

- $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
- Je größer das Zentrum, desto „abelscher“ ist die Gruppe.
- $Z(G)$ ist abelsch.
- Das neutrale Element e ist immer in $Z(G)$.
- $Z(G) = \{g \in G \mid \forall\, g' \in G:\ g' \circ g \circ g'^{-1} = g\}$

Das Zentrum

Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist:

$$Z(G) := \{g \in G | \, \forall \, g' \in G: \; g' \circ g = g \circ g'\},$$

also die Elemente, die mit jedem anderen Gruppenelement kommutieren.

Es gilt:

- $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
- Je größer das Zentrum, desto „abelscher“ ist die Gruppe.
- $Z(G)$ ist abelsch.
- Das neutrale Element e ist immer in $Z(G)$.
- $Z(G) = \{g \in G | \, \forall \, g' \in G: \; g' \circ g \circ g'^{-1} = g\}$

Das Zentrum

Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist:

$$Z(G) := \{g \in G |\ \forall\, g' \in G:\ g' \circ g = g \circ g'\},$$

also die Elemente, die mit jedem anderen Gruppenelement kommutieren.

Es gilt:

- $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
- Je größer das Zentrum, desto „abelscher“ ist die Gruppe.
- $Z(G)$ ist abelsch.
- Das neutrale Element e ist immer in $Z(G)$.
- $Z(G) = \{g \in G |\ \forall\, g' \in G:\ g' \circ g \circ g'^{-1} = g\}$

Das Zentrum

Das *Zentrum* $Z(G)$ einer Gruppe $(G, \circ)$ ist:

$$Z(G) := \{g \in G \mid \forall\, g' \in G:\ g' \circ g = g \circ g'\},$$

also die Elemente, die mit jedem anderen Gruppenelement kommutieren.

Es gilt:

- $Z(G) = G \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
- Je größer das Zentrum, desto „abelscher“ ist die Gruppe.
- $Z(G)$ ist abelsch.
- Das neutrale Element e ist immer in $Z(G)$.
- $Z(G) = \{g \in G \mid \forall\, g' \in G:\ g' \circ g \circ g'^{-1} = g\}$

Konjugieren

Ist $g \in G$, dann heißt die Abbildung

$$c_g : G \to G, h \mapsto g \circ h \circ g^{-1}$$

Konjugation mit g.

Was passiert, wenn das Manöver

$$R \circ R \circ M_U \circ R \circ R \circ M_U^{-1}$$

mit R konjugiert werden? D.h. was ist:

$$R \circ R \circ R \circ M_U \circ R \circ R \circ M_U^{-1} \circ R^{-1}?$$

Konjugieren

Ist $g \in G$, dann heißt die Abbildung

$$c_g : G \rightarrow G, h \mapsto g \circ h \circ g^{-1}$$

Konjugation mit g.

Was passiert, wenn das Manöver

$$R \circ R \circ M_U \circ R \circ R \circ {M_U}^{-1}$$

mit R konjugiert werden? D.h. was ist:

$$R \circ R \circ R \circ M_U \circ R \circ R \circ {M_U}^{-1} \circ R^{-1}?$$

Das Zentrum der Rubikwürfelgruppe

Gibt es Elemente im Zentrum $Z(G)$ der Rubikwürfelgruppe?

Das Zentrum der Rubikwürfelgruppe

Gibt es Elemente im Zentrum $Z(G)$ der Rubikwürfelgruppe?

- Die Nichtdrehung e ist in $Z(G)$.

Das Zentrum der Rubikwürfelgruppe

Gibt es Elemente im Zentrum $Z(G)$ der Rubikwürfelgruppe?

- Die Nichtdrehung e ist in $Z(G)$.
- Der Superflip

$$M_{\text{super}} = (B_{OLV} \circ (O \circ M_R)^4)^3$$

liegt im Zentrum.

Satz:

Das Zentrum der Rubikwürfelgruppe ist:

$$Z(G) = \{e, M_{\text{super}}\}$$

Folgerung: Die Rubikwürfelgruppe ist ziemlich wenig abelsch.

Anmerkung: Ein eigentlich besseres Maß für die Kommutativität einer Gruppe G ist die Kommutatoruntergruppe $K(G)$. Hier gilt umgekehrt: $K(G) = e \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
Für die Rubikwürfelgruppe ist $K(G)$ hingegen groß (s. Abschnitt 2.5 in [B]).

Das Zentrum der Rubikwürfelgruppe

Satz:

Das Zentrum der Rubikwürfelgruppe ist:

$$Z(G) = \{e, M_{\text{super}}\}$$

Folgerung: Die Rubikwürfelgruppe ist ziemlich wenig abelsch.

Anmerkung: Ein eigentlich besseres Maß für die Kommutativität einer Gruppe G ist die Kommutatoruntergruppe $K(G)$. Hier gilt umgekehrt: $K(G) = e \Leftrightarrow G$ ist abelsch.
Für die Rubikwürfelgruppe ist $K(G)$ hingegen groß (s. Abschnitt 2.5 in [B]).

Literatur

- [B] Wer etwas mehr über Gruppentheorie am Rubikwürfel lernen möchte, dem ist das Buch *Einführung in die Cubologie* von Christoph Bandelow zu empfehlen.

- [DLMR] Eine Beschreibung der Rubikwürfelgruppe für den 4-er Würfel findet sich in der Seminararbeit *Gruppentheorie am 4-Rubikwürfel* von Max Daniel, Benjamin Lipp, Björn Mulder und Jakob von Raumer unter:
  http://www.kubologie.de/
  Hier gibt es auch Betrachtungen zu $2n$-Rubikwürfeln.