2 Willkommen in der Permutationsgruppe S_n

Aufgabe 4:
Gib die folgenden beiden Permutationen in Zykelschreibweise an:

$$\begin{aligned} p_1 &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4, \\ p_2 &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 10 & 1 & 7 & 9 & 2 & 12 & 8 & 11 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_{12}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5:
Gib die folgenden beiden Permutationen als Wertetabellen an:

$$\begin{aligned} p_3 &:= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_8, \\ p_4 &:= \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \in S_6. \end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Berechne die folgenden Permutationen in S_4:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:
Wieviele Elemente hat S_n?

Aufgabe 8:
Wir wollen die folgenden Manöver betrachten:

$$R, \qquad M_R, \qquad Z_1 := M_U^{-1} R^2 M_U R^2, \qquad Z_2 := M_R^{-1} M_U^{-1} M_R M_U,$$
$$Z_3 := R^2 M_U^2 R^2 M_U^2 \quad \text{und} \quad Z_4 := M_U R$$

a) Gib zu den Manövern jeweils das inverse Manöver an.

b) Wie permutieren die Manöver jeweils die Ecken-, die Kanten- und die Mittelflächenwürfelchen des Rubikwürfels?

Aufgabe 9:
Gib für die Permutationen zum Manöver Z_4 aus Aufgabe 8 jeweils ihr Inverses an.

Aufgabe 10:
Die *Ordnung* eines Elements g in einer Gruppe $(G, \circ)$ ist die kleinste natürliche Zahl k $(\neq 0)$, so dass gilt:

$$g^k := \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{k-\text{mal}} = \text{id},$$

wobei id das neutrale Element der Gruppe ist.

a) Was ist jeweils die Ordnung von:

$$p_1 := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \qquad p_2 := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix},$$
$$p_3 := \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}, \qquad p_4 := \begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 4\end{pmatrix}$$

b) Wie kann man allgemein die Ordnung einer Permutation berechnen?

c) Bestimme jeweils die Ordnungen der Permutationen in Aufgabe 8.

Aufgabe 11:
Wie oft muss man die Manöver in Aufgabe 8 jeweils wiederholen, bis der Würfel wie vorher aussieht?

$\oplus$ **Aufgabe 12:** (*Ordnungen am Würfel*)
Gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Manöver gilt: wenn man das Manöver n-mal wiederholt, dann ist der Würfel wieder in der Ausgangsstellung? Wenn nein, beweise dies. Wenn ja, wie groß ist n mindestens?

$\oplus$ **Aufgabe 13:** (*Theorie in der S_n*)
Zwei Elemente p_1 und p_2 in S_n heißen *konjugiert*, wenn es eine Permutation $p \in S_n$ gibt, sodass

$$p_1 = p \circ p_2 \circ p^{-1}.$$

Wie kann man an der Zykelschreibweise erkennen, ob zwei Elemente konjugiert sind? (*Hinweis: Es hilft, sich erstmal Beispiele z.B. in S_3 anzusehen. Kommst Du zu einer Vermutung?*)