5 Reine und unreine Flips

Aufgabe 23: (*eine Invariante*)
Welche Flips bewirken die folgenden Manöver?

a) O, R und V

b) M_U, M_R und M_V

c) $Z_7 := M_U^2 \circ M_R^2$

d) die Manöver aus Aufgabe 8

Fällt Dir etwas auf? Falls ja, beweise es.

Aufgabe 24: (*Kompositionen*)

a) Von zwei Manövern M_1 und M_2 weiß man:
M_1 bewirkt die Permutationen

$$p_E = \begin{pmatrix}2 & 5 & 8 & 7 & 3\end{pmatrix}, \quad p_K = \begin{pmatrix}2 & 9 & 12 & 11 & 10 & 3 & 6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_F = \mathrm{id}$$

und die Flips

$$x = (0,\, 2,\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 2,\, 0) \text{ und } y = (0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 1,\, 1,\, 1).$$

M_2 bewirkt die Permutationen

$$p'_E = \begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 2\end{pmatrix}, \quad p'_K = \begin{pmatrix}1 & 9 & 2 & 5\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p'_F = \mathrm{id}$$

und die Flips

$$x' = (2,\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 2,\, 0,\, 0) \text{ und } y' = (1,\, 1,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0).$$

Welche Permutationen und Flips bewirkt das Manöver $M_2 \circ M_1$?

b) Wie kann man allgemein aus den Permutationen und Flips von zwei Manövern M_1 und M_2 die Permutationen und Flips, die das Manöver $M_2 \circ M_1$ bewirkt, berechnen?

Aufgabe 25: (*Gruppe der reinen Eckenflips*)
Zeige, dass man alle reinen Eckenflips, die die Invarianten-Bedingung erfüllen, als Würfelstellungen erreichen kann.
Hinweis: Verwende dazu die beiden folgenden Manöver

$$\begin{aligned} Z_5 &= (D_U \circ D_R^2 \circ V \circ L^{-1} \circ O^2)^4 \quad \textit{(aus Aufgabe 14)} \quad \textit{und} \\ RZ_5R^{-1} &= R(D_U \circ D_R^2 \circ V \circ L^{-1} \circ O^2)^4 \, R^{-1} \end{aligned}$$

Wieviele Würfelstellungen, die reine Eckenflips sind, gibt es? Beschreibe die Gruppe der reinen Eckenflips.

Aufgabe 26: (*Was für eine Ordnung!*)
Bestimme die Ordnung des Manövers

$$Z_8 := U^{-1}HU^{-1}O^2R.$$

Hinweis: Man könnte die Ordnung sogar finden, ohne eine einzige Drehung durchzuführen. Bequemer ist vielleicht, das Manöver einmal auszuführen.

$\oplus$ **Aufgabe 27:** (*Isomorphie*)
Definition: Zwei Gruppen $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ heißen *isomorph*, wenn es eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ gibt, mit

1. f ist bijektiv, d.h. jedes Element aus G_2 hat genau ein Urbild.
2. f ist ein Homomorphismus, das heißt für alle g und g' aus G gilt:

$$f(g \circ_1 g') = f(g) \circ_2 f(g').$$

Zeige: Die Gruppe der reinen Kantenflips ist isomorph zur Gruppe $(G, +)$, wobei G definiert ist als

$$G := \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{11}$$

und die Verknüpfung $+$ auf G komponentenweise definiert ist, also:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{12}) + (b_1, b_2, \ldots, b_{12}) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_{12} + b_{12}).$$