Schnupperkurs Sommer 2006

Gruppentheorie am Rubikwürfel

Gabriela Schmithüsen

Fakultät für Mathematik
Universität Karlsruhe

- Literatur:
  Einführung in die Cubologie von Christoph Bandelow, Vieweg, 1981
- Eine Lösungsstrategie gibt es z.B. im Internet unter
  http://www.mathematische-basteleien.de/zauberwuerfel.htm
- die Aufgaben stammen aus einer gemeinsamen Aufgabensammlung, die zusammen mit Professor Dr. F. Herrlich (Universität Karlsruhe) erstellt wurde.

1 Ein bisschen Gruppentheorie

Aufgabe 1:
Welche der folgenden Mengen bilden mit der jeweils angegebenen Verknüpfung + (Addition) oder · (Multiplikation) eine Gruppe?

a) $(\mathbb{R}, +)$: die reellen Zahlen mit der Verknüpfung +

b) $(\mathbb{N}, +)$: die natürlichen Zahlen mit +

c) $(\mathbb{Z}, \cdot)$: die ganzen Zahlen mit ·

Aufgabe 2:
In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ bilden die vier Punkte

$$A(1|0), \quad B(0|1), \quad C(-1|0), \quad D(0|-1)$$

ein Quadrat.
Es sei G die Menge der Drehungen der Ebene um den Punkt (0|0), die dieses Quadrat auf sich abbilden.

a) Wieviele sind es?

b) Die Verknüpfung $\circ$ soll jetzt das Hintereinanderausführen von Drehungen sein, d.h.:

$d_1 \circ d_2 =$ Zuerst die Drehung d_2 ausführen und dann die Drehung d_1.

Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe?

c) Schreibe alle Verknüpfungen $d_1 \circ d_2$ in eine Tabelle.
Solch eine Tabelle nennt man in der Gruppentheorie *Verknüpfungstafel*.

d) Ist $(G, \circ)$ kommutativ?

Felix Klein
1849 - 1925

Aufgabe 3:
Es seien

- d_x die Raumdrehung um die x-Achse um $90°$,
- d_y die Raumdrehung um die y-Achse um $90°$ und
- d_z die Raumdrehung um die z-Achse um $90°$.

a) Betrachte die vier Drehungen d_x^2, d_y^2, d_z^2 und die Nulldrehung id. Wie sieht die Verknüpfungstafel für die Verknüpfung $\circ$ aus?

b) Ist $G := \{d_x^2, d_y^2, d_z^2, \mathrm{id}\}$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe?

2 Willkommen in der Permutationsgruppe S_n

Aufgabe 4:
Gib die folgenden beiden Permutationen in Zykelschreibweise an:

$$p_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_4,$$
$$p_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 10 & 1 & 7 & 9 & 2 & 12 & 8 & 11 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in S_{12}.$$

Aufgabe 5:
Gib die folgenden beiden Permutationen als Wertetabellen an:

$$p_3 := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in S_8,$$
$$p_4 := \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \in S_6.$$

Aufgabe 6:
Berechne die folgenden Permutationen in S_4:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:
Wieviele Elemente hat S_n?

Aufgabe 8:
Wir wollen die folgenden Manöver betrachten:

$$R, \qquad M_R, \qquad Z_1 := M_U^{-1} R^2 M_U R^2, \qquad Z_2 := M_R^{-1} M_U^{-1} M_R M_U,$$
$$Z_3 := R^2 M_U^2 R^2 M_U^2 \quad \text{und} \quad Z_4 := M_U R$$

a) Gib zu den Manövern jeweils das inverse Manöver an.

b) Wie permutieren die Manöver jeweils die Ecken-, die Kanten- und die Mittelflächenwürfelchen des Rubikwürfels?

Aufgabe 9:
Gib für die Permutationen zum Manöver Z_4 aus Aufgabe 8 jeweils ihr Inverses an.

Aufgabe 10:
Die *Ordnung* eines Elements g in einer Gruppe $(G, \circ)$ ist die kleinste natürliche Zahl k ($\neq 0$), so dass gilt:

$$g^k := \underbrace{g \circ g \circ \ldots \circ g}_{k-\text{mal}} = \text{id},$$

wobei id das neutrale Element der Gruppe ist.

a) Was ist jeweils die Ordnung von:

$$p_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad p_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$p_3 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad p_4 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Wie kann man allgemein die Ordnung einer Permutation berechnen?

c) Bestimme jeweils die Ordnungen der Permutationen in Aufgabe 8.

Aufgabe 11:
Wie oft muss man die Manöver in Aufgabe 8 jeweils wiederholen, bis der Würfel wie vorher aussieht?

$\oplus$ **Aufgabe 12:** (*Ordnungen am Würfel*)
Gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für jedes Manöver gilt: wenn man das Manöver n-mal wiederholt, dann ist der Würfel wieder in der Ausgangsstellung? Wenn nein, beweise dies. Wenn ja, wie groß ist n mindestens?

$\oplus$ **Aufgabe 13:** (*Theorie in der S_n*)
Zwei Elemente p_1 und p_2 in S_n heißen *konjugiert*, wenn es eine Permutation $p \in S_n$ gibt, sodass

$$p_1 = p \circ p_2 \circ p^{-1}.$$

Wie kann man an der Zykelschreibweise erkennen, ob zwei Elemente konjugiert sind? (*Hinweis: Es hilft, sich erstmal Beispiele z.B. in S_3 anzusehen. Kommst Du zu einer Vermutung?*)

3 Ordnung muss sein! Aber welche?

Aufgabe 14: (*Ein Spezialmanöver*)
Was tut das Manöver

$$Z_5 := (D_U \circ D_R^2 \circ V \circ L^{-1} \circ O^2)^4?$$

Dabei bedeutet D_R: den Würfel als Ganzen wie bei R drehen und
D_U: ihn als Ganzen wie bei U drehen.

$D_U \circ D_{R^2}$ ist übrigens dasselbe, wie wenn man den Würfel einmal um die Achse durch die beiden Kantenwürfel 1 und 3 um 180° dreht!

Welche Permutationen bewirkt das Manöver? Wie groß ist seine Ordnung?

Aufgabe 15: *Bestimmung der Ordnung eines Manövers*
Es soll nun das folgende Manöver untersucht werden:

$$Z_6 := O^{-1}R^{-1}OR$$

a) Welche Permutationen der Ecken-, Kanten- und Mittelflächenwürfelchen bewirkt Z_6?

b) Wie oft muss man Z_6 wiederholen, bis jeder Eckenwürfel wieder an seinem ursprünglichen Platz ist? Was beobachtest Du, wenn Du es durchführst?

c) Wie oft muss man Z_6 wiederholen, bis jeder Kantenwürfel wieder an seinem Platz ist? Was beobachtest Du?

d) Was ist die Ordnung des Manövers Z_6?

Aufgabe 16: *Wer denkt, gewinnt*
Welche Ordnung hat das Manöver OR?
Hinweis: Verfahre ähnlich wie in der letzten Aufgabe.

Aufgabe 17:
Findest Du ein Manöver mit Ordnung 13?

4 Jede Menge Flips

Aufgabe 18: (*Reine Kantenflips*)
Ein *reiner Kantenflip* ist ein Manöver, bei dem Kantenwürfelchen geflippt werden und sonst nichts verändert wird.

a) Finde einen reinen Kantenflip, der genau vier Kantenwürfelchen flippt. (*Hinweis: Das Manöver Z_4 ist sehr hilfreich.*)

b) Finde einen reinen Kantenflip, der genau zwei Kantenwürfelchen flippt.

Aufgabe 19: (*Gleich oder nicht gleich?*)
Was bewirken die folgenden beiden Manöver?

a) $Z_9 \;:=\; V^{-2} \circ U^{-1} \circ R^2 \circ M_V^{-1} \circ R^{-2} \circ M_V \circ U \circ V^2$

b) $Z_{10} \;:=\; R^{-1} \circ V^{-1} \circ L \circ R^2 \circ M_U \circ R^{-2} \circ M_U^{-1} \circ L^{-1} \circ V \circ R$

Aufgabe 20: (*... und noch mehr Flips*)

a) Finde ein Manöver, das alle zwölf Kantenwürfelchen gleichzeitig flippt.

b) Kannst Du jedes Paar von Kantenwürfelchen flippen?

Aufgabe 21: (*Die Gruppe der reinen Kantenflips*)
Betrachte nun alle Manöver, die man durch beliebig (aber endlich) häufiges Hintereinanderausführen der Manöver in Aufgabe 20 bekommt.
Welche Bewegungen des Würfels bewirken die Manöver? Wie viele verschiedene bekommt man? Entdeckst Du eine Gruppe?

$\oplus$ **Aufgabe 22:** (*Einer allein*)
Findest Du einen reinen Kantenflip, der genau ein Kantenwürfelchen flippt?

5 Reine und unreine Flips

Aufgabe 23: (*eine Invariante*)
Welche Flips bewirken die folgenden Manöver?

a) O, R und V

b) M_U, M_R und M_V

c) $Z_7 := M_U^2 \circ M_R^2$

d) die Manöver aus Aufgabe 8

Fällt Dir etwas auf? Falls ja, beweise es.

Aufgabe 24: (*Kompositionen*)

a) Von zwei Manövern M_1 und M_2 weiß man:
M_1 bewirkt die Permutationen

$$p_E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_K = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 & 11 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } p_F = \mathrm{id}$$

und die Flips

$$x = (0, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 0) \text{ und } y = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1).$$

M_2 bewirkt die Permutationen

$$p'_E = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad p'_K = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } p'_F = \mathrm{id}$$

und die Flips

$$x' = (2, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 0) \text{ und } y' = (1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Welche Permutationen und Flips bewirkt das Manöver $M_2 \circ M_1$?

b) Wie kann man allgemein aus den Permutationen und Flips von zwei Manövern M_1 und M_2 die Permutationen und Flips, die das Manöver $M_2 \circ M_1$ bewirkt, berechnen?

Aufgabe 25: (*Gruppe der reinen Eckenflips*)

Zeige, dass man alle reinen Eckenflips, die die Invarianten-Bedingung erfüllen, als Würfelstellungen erreichen kann.

Hinweis: Verwende dazu die beiden folgenden Manöver

$$\begin{aligned} Z_5 &= (D_U \circ D_R^2 \circ V \circ L^{-1} \circ O^2)^4 \quad \textit{(aus Aufgabe 14)} \quad \textit{und} \\ RZ_5R^{-1} &= R(D_U \circ D_R^2 \circ V \circ L^{-1} \circ O^2)^4\, R^{-1} \end{aligned}$$

Wieviele Würfelstellungen, die reine Eckenflips sind, gibt es? Beschreibe die Gruppe der reinen Eckenflips.

Aufgabe 26: (*Was für eine Ordnung!*)

Bestimme die Ordnung des Manövers

$$Z_8 := U^{-1}HU^{-1}O^2R.$$

Hinweis: Man könnte die Ordnung sogar finden, ohne eine einzige Drehung durchzuführen. Bequemer ist vielleicht, das Manöver einmal auszuführen.

$\oplus$ **Aufgabe 27:** (*Isomorphie*)

Definition: Zwei Gruppen $(G_1, \circ_1)$ und $(G_2, \circ_2)$ heißen *isomorph*, wenn es eine Abbildung $f : G_1 \to G_2$ gibt, mit

1. f ist bijektiv, d.h. jedes Element aus G_2 hat genau ein Urbild.
2. f ist ein Homomorphismus, das heißt für alle g und g' aus G gilt:

$$f(g \circ_1 g') = f(g) \circ_2 f(g').$$

Zeige: Die Gruppe der reinen Kantenflips ist isomorph zur Gruppe $(G, +)$, wobei G definiert ist als

$$G := \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{11}$$

und die Verknüpfung $+$ auf G komponentenweise definiert ist, also:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{12}) + (b_1, b_2, \ldots, b_{12}) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_{12} + b_{12}).$$

6 Echte und gefälschte Würfelbewegungen

Aufgabe 28: Würfelmuster
Welche der in den Photos abgebildeten Würfelmuster sind Fälschungen?

Aufgabe 29: Der Konjugationstrick
Das Manöver $Z_{11} = R^2 \circ M_U \circ R^{-2} \circ M_U^{-1}$ bewirkt eine zyklische Vertauschung der drei Kantenwürfel 2, 3 und 4 (alle anderen Würfel werden dabei nicht verändert).

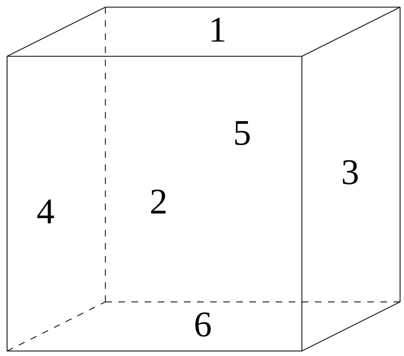
a) Finde ein Manöver, das die Kantenwürfel 2, 3 und 12 zyklisch vertauscht und alle anderen Würfel nicht verändert.

b) Finde ein Manöver, das die Kantenwürfel 9, 10 und 12 zyklisch vertauscht und alle anderen Würfel nicht verändert.

c) *Eine Anwendung:* Zeige, dass man drei beliebige Kantenwürfel zyklisch vertauschen kann, so dass alle anderen Würfel dabei nicht verändert werden. Wie viele verschiedene Fälle muss man unterscheiden?

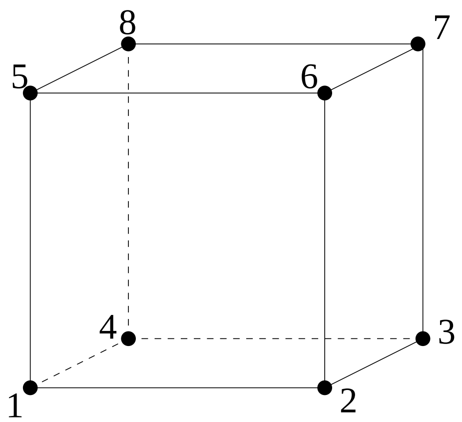
Der Würfel in Zahlen

Bezeichnung der Seitenflächen:

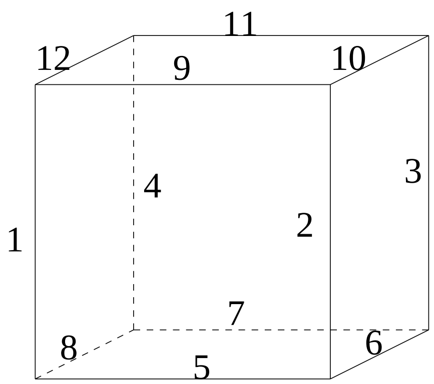


vorne:	2	orange
oben:	1	gelb
rechts:	3	blau
links:	4	grün
hinten:	5	rot
unten:	6	weiß

Bezeichnung der Ecken:



Bezeichnung der Kanten:



Markierungen für Flips

Bauplan für einen Musterwürfel:

			1	0	2			
			1	rot	1			
			2	0	1			
2	0	1	0	1	0	2	0	1
1	grün	1	0	gelb	0	1	blau	1
1	0	2	0	1	0	1	0	2
			1	0	2			
			1	or.	1			
			2	0	1			
			0	1	0			
			0	weiß	0			
			0	1	0			