Aufgabe 10:

a) $\mathrm{ord}(p_1) = 3, \quad \mathrm{ord}(p_2) = 4, \quad \mathrm{ord}(p_3) = 6, \quad \mathrm{ord}(p_4) = 2$

b) Allgemein gilt:

- Sei $c = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix}$ ein Zyklus in der S_n, dann ist:

$$\mathrm{ord}(c) = k.$$

- Sei $p \in S_n$ eine beliebige Permutation.
Schreibe p in Zyklenschreibweise: $p = c_1 c_2 \dots c_l$, wobei $c_1, c_2, \dots, c_l$ disjunkte Zyklen sind. Dann ist:

$$\mathrm{ord}(p) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(c_1), \dots, \mathrm{ord}(c_l)).$$

Beweis:
Da die Zyklen disjunkt sind, tritt jedes $a \in \{1, \dots, n\}$ in höchtens einem Zyklus c auf und es ist $p(a) = c(a)$.
$\Rightarrow \quad p^k(a) = a \iff k$ ist ein Vilefaches von $\mathrm{ord}(c)$.
$\Rightarrow \quad p^k(a) = a$ gleichzeitig für alle $a \in \{1, \dots, n\} \iff k$ ist Vielfaches von $\mathrm{ord}(c_1)$, von $\mathrm{ord}(c_2)$, ... und von $\mathrm{ord}(c_l)$.
Das kleinstmögliche k mit $p^k = \mathrm{id}$ ist also $\mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(c_1), \dots, \mathrm{ord}(c_l))$.

c)

Manöver M	$\mathrm{ord}(p_E)$	$\mathrm{ord}(p_K)$	$\mathrm{ord}(p_F)$	$\mathrm{ord}(M)$
R	4	4	1	4
M_R	1	4	4	4
Z_1	1	3	1	3
Z_2	1	1	3	3
Z_3	1	2	1	2
Z_4	4	4	4	8

Aufgabe 11:
Siehe $\mathrm{ord}(M)$ in der Lösung zu Aufgabe 10.

3 Ordnung muss sein! Aber welche?

Aufgabe 15:

a) $p_E = \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$, $p_K = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 11 \end{pmatrix}$, $p_F = \mathrm{id}$

b) Nach M^2 sind alle Eckenwürfelchen zu Hause, aber mit folgenden Flips:

Ecke 1:	kein Flip	$\hat{=}\ 0$	Ecke 5:	kein Flip	$\hat{=}\ 0$
Ecke 2:	120^0 gedreht	$\hat{=}\ 1$	Ecke 6:	120^0 gedreht	$\hat{=}\ 1$
Ecke 3:	kein Flip	$\hat{=}\ 0$	Ecke 7:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$
Ecke 4:	kein Flip	$\hat{=}\ 0$	Ecke 8:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$

Folgerung: Nach $2*3 = 6$ Wiederholungen des Manövers M ist jeder Eckenwürfel wieder zu Hause und unverdreht (also ohne Flip).

c) Nach M^3 sind alle Eckenwürfelchen zu Hause und zwar ohne Flip.

d) Aus b) und c) folgt: Nach $\mathrm{kgV}(6, 3) = 6$ Wiederholungen des Manövers M ist der Würfel wie vorher. Also gilt: $\mathrm{ord}(M) = 6$.

Aufgabe 16:
Die Permutationen, die von OR verursacht werden, sind:

$$p_E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_K = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 & 11 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad p_F = \mathrm{id}$$

Ordnungen: $\mathrm{ord}(p_E) = 5$, $\mathrm{ord}(p_K) = 7$, $\mathrm{ord}(p_F) = 1$.

Nach M^5 sind alle Eckenwürfel wieder zu Hause mit folgenden Flips:

Ecke 1:	kein Flip	$\hat{=}\ 0$	Ecke 5:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$
Ecke 2:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$	Ecke 6:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$
Ecke 3:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$	Ecke 7:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$
Ecke 4:	kein Flip	$\hat{=}\ 0$	Ecke 8:	240^0 gedreht	$\hat{=}\ 2$

Folgerung: Nach $5 * 3 = 15$ Wiederholungen von M ist jeder Eckenwürfel zu Hause und unverdreht.

Nach M^7 sind alle Kantenwürfel wieder zu Hause und zwar ohne Flip.

Folgerung insgesamt: Nach $\mathrm{kgV}(15, 7) = 105$ Wiederholungen des Manövers M ist der Würfel wieder in der Ausgangsstellung. Es gilt also:

$$\mathrm{ord}(M) = 105.$$

Aufgabe 17:
Nein, denn

$$\mathrm{ord}(M) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ord}(p_E), \mathrm{ord}(p_K), \mathrm{ord}(p_F)) \cdot N$$

mit $N \in \{1, 2, 3, 6\}$.
Da p_E in S_8, p_K in S_{12} und p_F in S_6 ist, teilt 13 weder p_E, noch p_K, noch p_F.
Damit kann 13 auch kein Teiler von $\mathrm{ord}(M)$ sein.